

συνέντευξη με τον Απόστολο Δοξιάδη



τη συνέντευξη εκ μέρους του Cogito πήραν οι
Αρης Αραγεώργης και Βάσω Κιντή

COGITO: Στο συνέδριο της Μυκόνου με θέμα “Mathematics and Narrative” (Μαθηματικά και Αφήγηση), που έγινε τον περασμένο Ιούλιο, εσείς και οι πραγματικά διακεκριμένοι προσκεκλημένοι διερευνήσατε τη σχέση μαθηματικών και αφήγησης. Ορισμένες ομιλίες ήταν οι ίδιες μια αφήγηση για ένα θέμα που σχετίζεται με τα μαθηματικά, άλλες προέβλεπαν τη σημασία της αφήγησης για έναν, θα μπορούσαμε να πούμε, «εξανθρωπισμό» των μαθηματικών δια της ενσωμάτωσής τους στη λογοτεχνία, το θέατρο ή τη μουσική. Ο θεωρητικός της επιστήμης των ηλεκτρονικών υπολογιστών, καθηγητής του Berkeley, Χρίστος Παπαδημητρίου συνέκρινε την αφήγηση με τον προγραμματισμό δείχνοντας ότι, όπως σε μια ιστορία, ακόμη και στην κατασκευή ενός προγράμματος μπορούμε να έχουμε π.χ. πλοκή. Εσείς υποστηρίζετε κάτι πιο ριζοσπαστικό, και υπ’ αυτήν την έννοια πιο ενδιαφέρον, νομίζω: ότι η ίδια η μαθηματική απόδειξη μπορεί να θεωρηθεί ένα είδος αφήγησης. Μπορείτε να εξηγήσετε πώς το εννοείτε δεδομένου ότι συνήθως τα μαθηματικά αντιπαραβάλλονται ακριβώς προς έναν αφηγηματικό λόγο; Αν ακόμη και τα μαθηματικά ή ο προγραμματισμός, εκδιπλώνουν μια αφήγηση μήπως η έννοια της αφήγησης γίνεται πάρα πολύ ευρεία, τα πάντα μπορεί να περιγραφούν ως αφηγήσεις, οπότε ο όρος χάνει κάθε συγκεκριμένο περιεχόμενο; **ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΔΟΞΙΑΔΗΣ:** Να αρχίσω από το δεύτερο σκέλος της ερώτησης. Αυτό που

επισημαίνετε ως κίνδυνο συμβαίνει πράγματι συχνά τα τελευταία χρόνια: οι έννοιες των λέξεων διευρύνονται τόσο ώστε να χάνουν το νόημά τους. Το είδαμε χαρακτηριστικά από τη δεκαετία του 1960 και μετά, όταν βαπτίζοντας κάποιοι τα πάντα «δομές» ή «σημεία» πήγαν τον τρουκτουραλισμό και τη σημειολογία στο μη περαιτέρω. Αν τα πάντα είναι δομές ή σημεία, τότε η διαπίστωση ότι κάτι ακόμη είναι το ένα ή το άλλο δεν μας λέει πολλά πράγματα!

C: Και στο προκείμενο, στον συγκεκριμένο κίνδυνο στην περίπτωση μας, της έννοιας της αφήγησης; Υπάρχει μεγάλη τάση τελευταία να μελετώνται πολλά φαινόμενα «ως αφηγήσεις». Ο ίδιος κίνδυνος της κοινοτοπίας δεν φτάνει και εδώ; Πώς τον αποφεύγετε εσείς, ή ο Χρίστος Παπαδημητρίου, λέγοντας ότι ο προγραμματισμός ή η μαθηματική απόδειξη είναι «σαν αφηγήσεις»;

A.Δ.: Κατ’ αρχήν, καθώς μιλούμε σε βαθύτερα νερά επιτρέψτε μου να μείνω στο θέμα της δικής μου ομιλίας και μόνο. Ο Χρίστος Παπαδημητρίου μίλησε σε κάπως διαφορετική γραμμή, η δική του ματιά είχε να κάνει κυρίως με τις ομοιότητες του προγραμματισμού με τη δόμηση μιας ιστορίας από έναν αφηγητή – πολύ ενδιαφέρουσα αναλογία, θεωρώ, αλλά αρκετά διαφορετική από τη δική μου.

Θα μείνω σε αυτήν. Ξεκινώντας έδωσα έναν ορισμό της αφήγησης, αφ’ ενός για να ξέρω πού βαδίζω μεθοδολογικά και αφ’ ετέρου για να απο-

φύγω ακριβώς τον σκόπελο που επισημάνατε, να υπαινιχτώ δηλαδή την αφήγηση υπό έννοια τόσο γενική ή τόσο σαφή –καμιά φορά αυτά τα δύο παραπτώματα οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα– που όποιες ομοιότητες θα έβρισκα στη συνέχεια ανάμεσα στα μαθηματικά και την αφήγηση να μη σημαίνουν τελικά κάτι ιδιαίτερο, να είναι με κάποια έννοια ταυτολογίες. (Και τούτο αξίζει να υπογραμμισθεί, αν και στοιχειώδεις: η λανθασμένη χρήση εννοιών ξεκινά σε μεγάλο βαθμό από τους υπερβολικά γενικούς ορισμούς). Ο δικός μου ορισμός της αφήγησης είναι κάπως διαφορετικός από τον καθημερινά παραδεκτό –που μέσες άκρες είναι ταυτόσημος με αυτό που λέμε «ιστορία» (story)– και είναι πιο προσανατολισμένος στη γνωστική λειτουργία της αφήγησης, στην αφήγηση δηλαδή ως έναν θεμελιώδη μηχανισμό, ή καλύτερα *τρόπο*, του ανθρώπινου νου. Κι αυτό το τονίζω γιατί η αφηγηματολογική παράδοση, ήδη από την *Ποιητική* του Αριστοτέλη –για να μην πάμε στα παλαιότερα, σανσκριτικά κείμενα– θέλει την αφήγηση φαινόμενο κυρίως *αισθητικό*. Μ’ άλλα λόγια, τη μελετά κατά κανόνα στη μορφή της έντεχνης έκφρασης, είτε είναι έπος, ή δράμα, ή μετά μυθιστόρημα, ή ό,τι άλλο. Όμως η *Ορέστεια* ή η *Οδύσσεια* δεν είναι διόλου *τυπικές* αφηγήσεις. Αντίθετα, είναι εξαιρετα δείγματα πολύ συγκεκριμένων τύπων έντεχνης αφήγησης. Η αφήγηση ως έννοια είναι όμως κάτι γενικότερο: είναι ο γνωστικός μηχανισμός που δημιουργεί, που *επιτρέπει* αν θέλετε, τέτοια ακραίας ομορφιάς φαινόμενα, αλλά δεν είναι καθόλου ταυτόσημος με αυτά – στη μαθηματική γλώσσα θα λέγαμε ότι είναι η «αναγκαία αλλά όχι και ικανή συνθήκη» τους, αφού αφήγηση μπορεί να είναι και μια πάρα πολύ απλή, άτεχνη και ελλιπής περιγραφή ενός συμβάντος που θα πούμε σε ένα φίλο, ένα ανέκδοτο, ένα σπάραγμα καθημερινού λόγου, χαοτικό και ημιτελές, ακόμη και μια απλή πρόταση που περιγράφει μια δράση με αρχή, μέση και τέλος. Έτσι, λέγοντας «ο Γιώργος πήγε στη θάλασσα να κάνει μπάνιο» δημιουργούμε μια μίνι αφήγηση. Όχι βαθειά, όχι ποιητική, όχι ενδιαφέρουσα, όχι ελκυστική – αλλά *αφήγηση*, μια αφήγηση *ατομική* αν θέλετε, με την έννοια του ατόμου της φυσικής, του στοιχειώδους, του μη περαιτέρω.

C: Ποιός είναι λοιπόν ο δικός σας ορισμός της αφήγησης;

A.Δ.: Πάνω κάτω ο εξής: *αφήγηση είναι η αναπαράσταση σε συμβολική γλώσσα μιας δράσης, σε σειριακή (γραμμική) μορφή, με αρχή, μέση και τέλος όπου, επιπλέον, κάποια γεγονότα –αλλά όχι όλα, αναγκαστικά– συνδέονται με σχέσεις αιτιότητας*. Και αυτός ο προσδιορισμός, το «όχι όλα, αναγκαστικά» είναι απαραίτητος: σε μια ατομική,

ελάχιστη αφήγηση βέβαια, όπως στο παραπάνω παράδειγμα («ο Γιώργος πήγε στη θάλασσα, κτλ...») σίγουρα έχουμε αιτιακό δέσιμο. Όμως σε μια πιο σύνθετη σειρά δράσεων τι γίνεται; Αν μεν όλα τα επί μέρους γεγονότα της (οι «υπο-δράσεις», θα λέγαμε) δεν συνδέονται καθόλου αιτιακά, κανένα με κανένα άλλο, τότε η παράθεσή τους δεν συνιστά αφήγηση αλλά πλίνθους και κεράμους, ατάκτως ερριμμένους. Αλλά όσο σημαντικό είναι αυτό είναι και το άλλο: ότι δεν είναι ανάγκη να συνδέονται όλα με όλα αιτιακά. Πάρτε το εξής εκτενέστερο παράδειγμα:

«Ο Γιώργος βγήκε τη συνθησιμένη ώρα από το σπίτι του. Κοίταξε τον ουρανό. Ψιλόβρεχε. Άνοιξε την ομπρέλα του και πήγε στο περίπτερο, αγόρασε εφημερίδα και έπειτα στάθηκε στη στάση του λεωφορείου και ξεδίπλωσε την εφημερίδα. Κοίταξε, όπως το είχε κάθε μέρα συνήθιο, πρώτα τις στήλες των ‘κοινωνικών’. Διάβασε τις κηδείες. Ευτυχώς δεν είχε πεθάνει κανένας γνωστός. Έπειτα, τους ‘μέλλοντες γάμους’. Το βλέμμα του σταμάτησε στην τρίτη καταχώρηση: ‘Η Μαρία Ευρυγένους και ο Νικόλαος Ζαλμάς...’ Ο Γιώργος κίτρισε... ‘Μαρία Ευρυγένους’, οι δυο λέξεις ξεναπέρασαν από τον νου του, σαν πυρωμένες σαϊτιές. Τσαλάκωσε την εφημερίδα και την πέταξε στο πεζοδρόμιο. Έπειτα έβγαλε το κινητό του τπλέφωνο και σκημάτισε με τρεμάμενα χέρια έναν αριθμό...».

Κανείς δεν διαφωνεί, πιστεύω, ότι η παράγραφος αυτή συνιστά αφήγηση –παρακαλώ αγνοήστε την αισθητική της πλευρά!– ή, αν θέλετε, *μέρος* αφήγησης. Και βέβαια είναι στο πλαίσιο του ορισμού μου: αναπαριστά συμβολικά (μέσω του γραπτού λόγου, εν προκειμένω) μια δράση, σε σειριακή μορφή, με αρχή, μέση και τέλος. Όμως, κάποια γεγονότα της βρίσκονται σε αιτιακή σχέση, ενώ άλλα όχι. Άλλα ζεύγη της τα συνδέει μια χαλαρή, θα τη λέγαμε, αιτιακή σχέση (η αγορά εφημερίδας με την ανάγνωσή της για να διαβάσεις την εφημερίδα πρέπει πρώτα κάπως να βρεθεί στα χέρια σου, αλλά αυτό είναι τόσο αυτονόητο που δεν το σημειώνουμε ως ισχυρή σχέση), άλλα έντονη (προφανώς ο Γιώργος πετά την εφημερίδα και κάνει το τηλεφώνημα αντιδρώντας στην είδηση του γάμου που διάβασε), αλλά και κάποια *μηδενική*. Έτσι, ενώ το ότι ο Γιώργος ανοίγει την ομπρέλα έχει άμεση σχέση με το ότι βρέχει, το ότι βρέχει διόλου δεν επηρεάζει αιτιακά το κεντρικό γεγονός, τον επικείμενο γάμο της Μαρίας που πληροφορείται ο Γιώργος διαβάζοντας. Δηλαδή: *κάποια γεγονότα της αφήγησης συνδέονται με αιτιακή σχέση, αλλά όχι όλα*.

Βλέπετε ότι χρησιμοποιώ την έννοια «αφήγηση» κάπως γενικότερα από την τρέχουσα χρήση, κι αυτό γιατί την ορίζω με έναν τρόπο που προβάλει τον γνωστικό τρόπο της, ως περιγραφική και σύνδεση γεγονότων της ζωής.

C: Ποια ήταν η βασική θέση της ομιλίας σας στη Μύκονο;

A.Δ.: Άρχισα με μια αναφορά στην ανθρώπινη εξέλιξη, στη λεγόμενη Άνω Παλαιολιθική περίοδο (την εποχή που αρχίζει περίπου πριν από 40.000 χρόνια) όπου έχουμε ουσιαστικά την ξαφνική εμφάνιση του ανθρώπινου πολιτισμού σχεδόν στη σημερινή, γνωστικά, μορφή του, το «πολιτισμικό Big Bang», όπως συχνά το αποκαλούν οι εξελι-

κτικοί ανθρωπολόγοι. Η ανάπτυξη –αν όχι και η ίδια η γένεση, που ίσως προηγείται στη μορφή κάποιες «πρωτο-γλώσσας»– της ανώτερης λειτουργίας του λόγου είναι το κυριότερο χαρακτηριστικό της περιόδου. Από εκείνο το σημείο και μετά ο homo sapiens ελάχιστα μπορεί να ξεχωρίσει από τον σημερινό άνθρωπο ως βασική δομή, όχι μόνο σωματική, αλλά και νοητική. Και σε εκείνο ακριβώς το σημείο στην ιστορία μας εμφανίζεται η αφήγηση ως βασικός γνωστικός μηχανισμός. Τα πρώτα δείγματα εικαστικής τέχνης, όπως οι σπηλαιογραφίες του Lascaux, και τα όσα δείγματα πρώιμης λογοτεχνικής κατασκευής φτάνουν ως εμάς, έμμεσα, μέσω της προφορικής επιβίωσης (μύθοι, παραμύθια, κλπ.) δείχνουν ότι αυτή η λειτουργία έχει πλήρως σχηματιστεί. Θα μπορούσαμε να πούμε, εναλλακτικά, ότι είναι σχεδόν ταυτόσημη με την ανάπτυξη σύνθετων μορφών λόγου. Όπως δεν υπάρχει πολιτισμός στον πλανήτη χωρίς τη λειτουργία του λόγου, δεν υπάρχει και πολιτισμός χωρίς ιστορίες, που χτίζονται πάνω στο γνωστικό υπόβαθρο της αφήγησης ως τρόπου της νόησης.

C: Αυτή είναι και η κατεύθυνση στην οποία κινείται ο νέος κλάδος της αφηγηματικής ψυχολογίας.

A.Δ.: Ακριβώς. Μέχρι εδώ δεν είπα τίποτε καινούριο – αν και μερικά ήταν καινούρια για τους περισσότερους μαθηματικούς στο ακροατήριο. Η ομιλία μου αρχικά αναφέρθηκε σε κάποια πρόσφατα ευρήματα της ανθρωπολογίας καθώς και της ψυχολογίας, εξελικτικής, αναπτυξιακής και γνωστικής, με ιδιαίτερη έμφαση στην ερευνητική γραμμή που ξεκίνησε ο Theodore Sarbin, μελετώντας αυτό που αποκαλεί «ιστορημένη φύση της ανθρώπινης συμπεριφοράς» (‘storied nature of human conduct’), και ο Jerome Brunner, που πρώτος χαρακτήρισε την αφήγηση βασικό τρόπο γνωστικής λειτουργίας. Να τονίσουμε μάλιστα εδώ ότι ο Brunner τοποθετεί την αφήγηση πλάι στον παραγωγικό-ταξινόμοτικό τρόπο της λογικής ως τον *άλλο κύριο* τρόπο της ανθρώπινης γνωστικής λειτουργίας, στο πρωτοποριακό άρθρο του ‘Two modes of thought’!

Η ομιλία μου όμως πήγε και παλιότερα από την Άνω Παλαιολιθική. Στη δημοσιευμένη μορφή της² δίνω μια ερμηνεία του πως η ίδια η αφήγηση, ως γνωστικός μηχανισμός, χτίζεται πάνω σε βαθύτερους, και παλαιότερους, προ-συμβολικούς γνωστικούς μηχανισμούς – παρατήρηση στην οποία θα αναφερθώ σε λίγο.

Τώρα, για την κατάδειξη της ομοιότητας ανάμεσα στη μαθηματική απόδειξη και την αφήγηση: στην ουσία έδειξα ότι η μαθηματική σκέψη είναι *ένα είδος αφήγησης*, ότι δηλαδή η απόδειξη ενός θεωρήματος, είτε στη μορφή στην οποία μπορεί ένας μαθηματικός τελικά να τη δημοσιεύσει ή και σε άλλη, πρότερη –και σε κάποια ακόμη από τις ενδιάμεσες μορφές της που παίρνει στη διάρκεια της έρευνας–, έχει όλα τα τυπικά χαρακτηριστικά του ορισμού της αφήγησης που έδωσα: μια απόδειξη είναι, ακριβώς, *αναπαράσταση σε συμβολική γλώσσα, σε σειριακή (γραμμική) μορφή, με αρχή, μέση και τέλος* όπου, επιπλέον, *τα γεγονότα συνδέονται κατά κανόνα –αλλά όχι όλα, αναγκαστικά– με σχέσεις αιτιότητας*.

C: Η αφήγηση όμως, όπως την ορίσατε, είναι αναπαράσταση δράσης. Η απόδειξη τι αναπαριστά;

A.Δ.: Αυτό είναι βασικό ερώτημα: σε τι αντιστοιχεί η «δράση» σε μια απόδειξη, αλλά και η «σχέση αιτιότητας», που επίσης εμφανίζεται στον ορισμό μου της αφήγησης. Η αντιστοιχία εκ πρώτης όψεως μοιάζει αφύσικη, αφού μια δράση στην καθημερινή ζωή λαμβάνει χώρα σε τόπο και χρόνο πραγματικό, υλικό, και η σχέση αιτιότητας είναι κάτι που μπορούμε να το καταλάβουμε, συνήθως, με τη γλώσσα της φυσικής, όπως για παράδειγμα: «Ο Α δίνει μια μπουνιά στον Β (πρώτη δράση) και ο Β πέφτει κάτω (δεύτερη δράση, που συνδέεται αιτιακά, ως αποτέλεσμα, της πρώτης)». Πώς γίνεται, λοιπόν, να αντιστοιχούν αυτές τις έννοιες στα μαθηματικά, που από τον Πυθαγόρα και τον Πλάτωνα και μετά κινούνται στον χώρο του αφηρημένου; Η ερώτηση είναι απολύτως δικαιολογημένη. Μα πριν την απάντησή να τονίσω ότι η ομοιότητα για την οποία μιλώ είναι ομοιότητα *μορφής* ή, όπως αποκαλείται στη μαθηματική γλώσσα, *ομομορφισμός* (homomorphism). Και για να δούμε αν μια συσχέτιση δύο συνόλων είναι ομομορφισμός πρέπει, αφού συσχετίσουμε τα επιμέρους στοιχεία των συνόλων, τα μεν με τα δε, να εξετάσουμε αν αυτή η αντιστοιχία διατηρεί τις βασικές δομές καθενός από τα δύο σύνολα που συσχετίζονται. Ένα απλό παράδειγμα, ας πούμε, αλγεβρικού ομομορφισμού από το σύνολο των ακεραίων αριθμών στον εαυτό του είναι αυτό που αντιστοιχεί σε κάθε αριθμό το πολλαπλασίο του επί 2, που γράφεται συμβολικά φ: α → 2α. Αυτός είναι ομομορφισμός ως προς τη δομή που ορίζει η πρόσθεση, καθώς φ(α+β)=φ(α)+φ(β).³

Η δική μου συσχέτιση των επιμέρους στοιχείων γίνεται ως εξής: ο χώρος των ιστοριών αποτελείται από γεγονότα (δράσεις), και η δομή του, η βασική δομή, ορίζεται από τις σχέσεις αιτιότητας. Αντίστοιχα, ο κόσμος μιας μαθηματικής θεωρίας αποτελείται από προτάσεις. Δηλαδή όπως το βασικό, το ατομικό στοιχείο στον χώρο της αφήγησης είναι το στοιχειώδες γεγονός (φερ’ ειπείν ένα φίλι), τα αντίστοιχα *άτομα* στο νοητό σύμπαν των μαθηματικών είναι οι απλές προτάσεις, δηλαδή οι διαπιστώσεις στοιχειωδών αληθειών, όπως π.χ. «το 5 είναι πρώτος αριθμός» ή «το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο». Και αυτά μπορούν να συσχετισθούν δομικά με μια δομή που διατηρεί ο ομομορφισμός, διατηρούσα-τη-δομή «μετάφραση» από το ένα σύστημα στο άλλο, ως εξής: όπως στον υλικό κόσμο τις δράσεις τις ενώνει η σχέση αιτιότητας, δηλαδή «η δράση α προκαλεί τη δράση β», αντίστοιχα στα μαθηματικά τις ενώνει η σχέση συνεπαγωγής, δηλαδή «η πρόταση α συνεπάγεται την πρόταση β», που συχνά μπορεί να έχει και τη μορφή ενός απλού «κανόνα μεταγραφής» (rewrite rule), δηλαδή ενός κανόνα του τύπου «όπου α γράφει β». Άραξ και ορίσουμε αυτή την αντιστοιχία στα βασικά στοιχεία των δύο συνόλων, μπορούμε κατόπιν να μιλάμε για εντελώς όμοιες *μορφές* στη μαθηματική-αποδεικτική και την αφηγηματική λειτουργία. Τα δύο επιμέρους σύμπαντα λόγου, μαθηματικών και αφήγησης, είναι σαν να είναι το ένα αντίγραφο του άλλου. Όλα τα επιμέρους στοιχεία του ορισμού της αφήγησης βρίσκουν απόλυτη εφαρμογή στην απόδειξη.

C: Όμως η ίδια αντιστοιχία δράση/πρόταση και

αιτιότητα/συνεπαγωγή δεν έχει κάτι το αυθαίρετο; Έστω και αν αναδεικνύει παρόμοιες μορφές, μήπως γίνεται «επειδή έτσι μας αρέσει» ή για να βιάσουμε την κατάδειξη αυτής της ομοιότητας δομής;

Α.Δ.: Όχι, δεν είναι αυθαίρετη, έστω κι αν μοιάζει έτσι εκ πρώτης όψεως. Κι αυτό γιατί την οδηγεί ένας εξελικτικός λόγος, που είναι ότι ουσιαστικά και τα δυο είναι όψεις του ιδίου βαθύτερου γνωστικού μηχανισμού, πριν από την Άνω Παλαιολιθική. Γιατί εκεί εντοπίζεται ο θεμελιώδης γνωστικός μηχανισμός που προηγείται και της αφήγησης (και στον οποίο αυτή στηρίζεται), και από τη μελέτη του γίνεται φανερό ότι *και* η αφήγηση *και* η μαθηματική απόδειξη δεν είναι παρά δυο εκφάνσεις ενός πράγματος – χωρίς να αναπτύξω το θέμα καθόλου τώρα, να πω εδώ ότι είναι τρόπος βασισμένος στο μοντέλο της χωρικής αναζήτησης. Αν δούμε τα φαινόμενα με αυτή την οπτική, εξελικτικά, οι αντιστοιχίες δράση/πρόταση και αιτιότητα/συνεπαγωγή γίνονται εντελώς φυσικές, δεν είναι παρά άλλοι τρόποι να πούμε το ίδιο πράγμα. Αν δεν γίνονται εδώ εντελώς αντιληπτός, το καταλαβαίνω και ζητώ συγγώμη. Χρειάστηκε μια ολόκληρη ώρα στη Μύκονο, και πολλά οπτικά εργαλεία, για να παρουσιάσω την άποψή μου. Μοιραία συμπιέζοντάς την, εδώ, γίνεται πιο δυσητόπη. Για να παραλλάξω ένα γνωστό σλόγκαν: «Η υπερβολική συμπίεση βλάπτει σοβαρά την κατανόησή!» (Πάντως ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται περισσότερο για το θέμα θα βρει τη διεξοδική του ανάλυση στη γραπτή μορφή της ομιλίας μου).

С: Ας αλλάξουμε λίγο κατεύθυνση. Καταλαβαίνω όσους θέλουν να ενσωματώσουν τα μαθηματικά σε ένα μυθιστόρημα ή ένα θεατρικό έργο ή να δώσουν με αφηγηματικό τρόπο ιστορικά στοιχεία για μαθηματικούς , μαθηματικά προβλήματα, αποδείξεις και θεωρίες, όπως γίνεται τα τελευταία χρόνια. Θέλουν να κάνουν τα μαθηματικά πιο προσιτά και τα εντάσσουν σε ένα άλλο, πιο δημοφιλές, είδος. Ο δικός σας όμως παραλληλισμός της μαθηματικής απόδειξης με την αφήγηση τι στόχους εξυπηρετεί; Στην πρώτη περίπτωση, της λεγόμενης «μαθηματικής λογοτεχνίας», ή της εκλαϊκευσης, τα ίδια τα μαθηματικά δεν επηρεάζονται. Εσείς όμως τι θέλετε, να παρέμβετε στην ίδια την πρακτική των μαθηματικών;

Α.Δ.: Κοιτάζτε, βλέποντάς με ως συγγραφέα μυθιστορημάτων καταρχήν, και μάλιστα αυτόν που έγραψε τον *Θείο Πέτρο* και την *Εικασία του Γκάλντμπαχ*, δηλαδή ένα «μαθηματικό μυθιστόρημα» –φρικαλέα διατύπωση, αλλά την χρησιμοποίησα για να συνεννοηθούμε– είναι φυσικό να θεωρεί κάποιος ότι ξεκινά από τη θέση ενός λογοτέχνη που ενδιαφέρεται για μαθηματικά θέματα. Όμως πιστεύω ότι δεν ανήκω σε καμιά από τις δυο κοινές κατηγορίες συγγραφέων «μαθηματικής λογοτεχνίας». Ας τις δούμε: η πρώτη είναι των συγγραφέων που βάζουν τα μαθηματικά σε ένα λογοτεχνικό έργο για να τα κάνουν πιο προσιτά, όπως το είπατε, κι αυτό συνήθως συμβαίνει με τους μαθηματικούς που «το γυρίζουν» κάποια στιγμή και γράφουν λογοτεχνία ή αφηγηματική εκλαϊκευση. (Εγώ σίγουρα δεν ανήκω σε αυτή την κατηγορία: αν και σπούδασα μαθηματικά, στη συγγραφή του *Θείου Πέτρου* δεν είχα κανένα προ-

παγανδιστικό ή διδακτικό σκοπό – όταν έγραφα το βιβλίο ήταν για μένα ένα ακόμη μυθιστόρημα, μια ανθρώπινη ιστορία.) Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι λογοτέχνες εκ καταγωγής που γράφουν κάποια στιγμή με μαθηματικό θέμα, όπως ας πούμε ο David Auburn και το θεατρικό έργο *Proof*, ή ο Ira Hauptman και το *Partition*, που αναφέρεται στον ινδό μεγαλοφυή μαθηματικό Σρινιβάσα Ραμάναντζαν. Ούτε ο ένας ούτε ο άλλος είναι μαθηματικοί ή γνωρίζουν μαθηματικά πέραν των σχολικών ή έστω ενδιαφέρονται για αυτά – αυτό από δικές τους ομολογίες. Έτσι, εδώ τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται με κάποια έννοια ως ένας ιδιότυπος ιδεολογικός εξωτισμός. (Αναφέρω σχετικά τη φράση του διακεκριμένου αμερικανού κινηματογραφικού κριτικού Stanley Kauffman για την ταινία που βασίστηκε στο *Proof*: «Τα μαθηματικά δανείζουν στο *Proof* περισσότερη σοβαρότητα από όση δικαιούται». Και ο νόων νοείται...) Ούτε σε αυτή την κατηγορία όμως ανήκω: δεν μου αρέσει καθόλου η λογική «coulleur locale» στη λογοτεχνία, είτε είναι μέσω ταξιδιών στον Αμαζόνιο, ή μέσω της χρήσης βαθυστόχαστων εννοιών. Το ότι ο ήρωας στον *Θείο Πέτρο* ήταν μαθηματικός οφείλεται απλά στο ότι αγαπώ τα μαθηματικά. Όπως ο Κόνραντ, που ήταν ναυτικός επί χρόνια, έγραψε για ναυτικούς κι ο Μπουκόφσκι που ήταν γερό ποτήρι έγραψε για μπάρβιους, έτσι εγώ –mutatis mutandis, πάντα, τπρουμένων των αναλογιών–, που ξέρω κάπως τον κόσμο των μαθηματικών, έγραφα για έναν μαθηματικό, ακολουθώντας τη γνωστή, αλλά σοφή οδηγία «γράφε για ό,τι γνωρίζεις».

С: Θα μπορούσαμε να πούμε τότε ότι ο στόχος της αναζήτησής σας, που παρουσιάσατε στη Μύκονο, φεύγει από τη λογοτεχνική σας ταυτότητα και πηγαιίνει στη μαθηματική – στον βαθμό που αυτή υπάρχει; Είναι δηλαδή περισσότερο μαθηματικός ή, πιο συγκεκριμένα, μαθηματικός-φιλοσοφικός, στοχεύει σε να παρουσιαστεί μια άλλη αντίληψη για τα μαθηματικά, που αντίκειται στις συννησιμένες;

Α.Δ.: Ναι, σαφώς, μια τέτοια περιγραφή είναι κοντύτερα στις προθέσεις μου. Η ομιλία στη Μύκονο, όπως και μια σειρά πρωτότερων εργασιών μου που οδήγησαν σε αυτή,⁴ σαφώς δεν είναι έργο του «μαθηματικού λογοτέχνη» – και ξαναδηλώνω την απέχθειά μου για τον όρο! Ο σκοπός μου ερευνώντας την ομοιότητα μαθηματικά/αφήγηση είναι, ακριβώς όπως τον λέτε, «μαθηματικός-φιλοσοφικός», είναι κοντύτερα δηλαδή στη φιλοσοφία των μαθηματικών, με την ευρύτερη έννοια. Δεν στοχεύει όμως στο να αντιθεθεί σε κάποιες άλλες αντιλήψεις της, όσο να παρουσιάζει και μια άλλη, εναλλακτική γλώσσα περί τα μαθηματικά, που, ας μου επιτραπεί, αφορά νομίζω τελικά και στην αφήγηση την ίδια – και τη λογοτεχνία, δι’ αυτής. Όμως, καθώς οι περισσότεροι στο συνέδριο της Μυκόνου ήταν μαθηματικοί ή μαθηματικίζοντες, εκεί μίλησα περισσότερο για τα μαθηματικά, δηλαδή για το πόσο πολλά μπορούν να μάθουν από την αφήγηση. Τώρα, το πώς ένας συγγραφέας μυθιστορημάτων –έστω κι αν σπούδασε μαθηματικά– φτάνει να μιλάει για τη φιλοσοφία των μαθηματικών... Ε, αυτό, αν έχετε την καλοσύνη χρεώστε το, με επιείκεια και φιλαλληλία, σε κάποιες λογής ποιητική άδεια!

С: Ορισμένοι θα υποστήριζαν ότι μια από τις αρετές μιας αφήγησης ως έργου τέχνης (π.χ., ενός μυθιστορήματος) είναι το να είναι *ανοικτή* σε πολλαπλές ερμηνείες. Από την άλλη, μια μαθηματική απόδειξη δεν πρέπει να εμπεριέχει αμφισβησίες. Επιπλέον, ένα πρόγραμμα που περιέχει αμφισβησίες δεν είναι «αποτελεσματικό»: σε έναν αλγόριθμο πρέπει να είναι απολύτως σαφές ποιο είναι το επόμενο βήμα. Δεν συνιστά αυτό μια σημαντική διαφορά;

Α.Δ.: Σε κάποιο βαθμό, μόνο. Αλλά τη θέση ότι «ένα λογοτεχνικό έργο είναι ανοικτό σε πολλές αναγνώσεις ενώ ένα μαθηματικό θεώρημα μόνο σε μία» την αμφισβητώ, εν μέρει τουλάχιστον, και στα δυο της σκέλη. Ας αρχίσουμε από το πρώτο, ότι «ένα λογοτεχνικό έργο είναι ανοικτό σε πολλές αναγνώσεις». Το στοιχείο αυτό βέβαια υπάρχει, αλλά πρέπει να θυμηθούμε ότι η πολυσημία αποκτά σημασία κυρίως τους τελευταίους αιώνες και μάλιστα μόνο τις πολύ πρόσφατες δεκαετίες αναφέρεται ως *πλεονέκτημα*. Κάποτε, παλιά, η οποιαδήποτε ασάφεια –και η ασάφεια έχει αδήριτη σχέση με την πολυσημία– ενός καλλιτεχνικού έργου θεωρείτο μειονέκτημα και μόνον. Αυτό βέβαια αλλάζει κυρίως με τον Ρομαντισμό. Ο Τζων Κητς, πριν από δυο αιώνες, μιλάει για την «αρνητική δυνατότητα» (negative capability) ως μέγιστο προσόν ενός ποιητή, δηλαδή την ικανότητά του να ζει μέσα σε αντιθέσεις και αμφιβολίες χωρίς να κυριεύεται από τη μανία της λύσης τους, μέσω της καταφυγής στα στοιχεία ή τη λογική (facts or reason) – κι ο Κητς είναι γνήσιο τέκνο του Ρομαντισμού. Αυτή η πορεία, που είναι τελικά η πορεία της σημασίας της υποκειμενικότητας στο έργο τέχνης, κορυφώνεται με τον Συμβολισμό και πάει και παραπέρα σε κάποιες εκφάνσεις του Μοντερνισμού, για να καταλήξει στο δεύτερο μισό του εικοστού αιώνα στα περί «ανοικτού κειμένου» και τη θεωρία του «θανάτου του συγγραφέα» σύμφωνα με την οποία, στις ακρότερες μορφές της, ο καθένας διαβάζει σε ένα κείμενο λίγο πολύ ό,τι του αρέσει.

С: Λέτε ότι η πολυσημία, με άλλα λόγια, δεν είναι εγγενής στη λογοτεχνική λειτουργία;

Α.Δ.: Λέω ότι τα πράγματα δεν είναι τόσο απόλυτα. Ζούμε σε ανοικτή κοινωνία, στα μέτρα τουλάχιστον – δεν ξέρω αν στο Ιράν, για παράδειγμα, έχουν τις ίδιες απόψεις περί εναλλακτικών νοημάτων κάποιων αφηγημάτων – και η σχέση μας με τη λογοτεχνία αντανακλά μια στάση ζωής, μια στάση που σήμερα διαμορφώνεται κατά της αυθεντίας, της ορθοδοξίας, του φονταμενταλισμού των ιδεών. Ένα έργο του Σαίξπηρ φαίνεται σ’ εμάς –ήδη εν μέρει φαινόταν έτσι στους Ρομαντικούς– ακόμη πιο ενδιαφέρον *ακριβώς* επειδή μπορεί να σημαίνει πολλά διαφορετικά πράγματα, σε πολλούς διαφορετικούς ανθρώπους. Δεν είμαι καθόλου σίγουρος όμως ότι την ίδια πολλαπλότητα εναλλακτικών νοημάτων έβγαζαν τα έργα του Σαίξπηρ για τους πρώτους τους θεατές, στην Ελισαβετιανή ή Ιακωβιανή εποχή. Δεν λέω φυσικά ότι δεν υπήρχαν πολλαπλές αναγνώσεις και τότε, όμως, με κάποια έννοια, πολλές από αυτές συνιστούσαν *παραναγνώσεις* – ήταν εκτροπές από τη *σωστή ανάγνωση*, το νόημα του έργου, που ως έννοια υπήρχε τότε πολύ περισσότερο από ό,τι στη μεταμοντέρνα αντίληψη της λογοτεχνίας. (Δείτε το όλο

θέμα της καθολιστικής, ερμητικής ή άλλης εσωτεριστικής ερμηνείας κάποιων κειμένων την ίδια εποχή, όπως λαμπρά το αναδεικνύει στις μελέτες της η Frances Yates: η σημασία ανάδειξης του «κρυφού», εσωτερικιστικού (*esoteric*) νοήματος ενός κειμένου προϋποθέτει ένα άλλο, που είναι κοινά αποδεκτό, το *εξωτερικό ή εξωτερικιστικό* ίσως (*exoteric*) νόημα. Κι αν ο Σαίξπηρ μας παραφαίνεται κοντινός, ή έχουμε συνηθισεί τόσο πολύ από τους μοντέρνους σκηνοθέτες να τον βιάζουμε, ενίοτε, στις πιο απίθανες αναγνώσεις, ας κοιτάξουμε τον Όμηρο. Δεν πιστεύουμε άραγε ότι το έργο του είχε κάποια νοήματα συγκεκριμένα στην εποχή του, ότι για τους πρώτους ακροατές τους τα έπη σήμαιναν εν πολλοίς κάποια λίγο πολύ σταθερά πράγματα; Φυσικά, τώρα μπορεί να ξαναδιαβάζουμε την *Ιλιάδα* κάθε δεκαετία, ή κάθε χρονιά, κατά τα γούστα μας, πότε ως καταγγελία του ιμπεριαλισμού, πότε ως αντι-φεμινιστικό μανιφέστο, μύθο ευνουχισμού, αντιπολεμική κραυγή, λογοκεντρική προπαγάνδα ή στιχόπητο άλλο. Αλλά αυτό δείχνει τις δικές μας διαθέσεις, όχι του Ομήρου. Το «σοφόν το σαφές» ήταν μια αρχή κεντρική στην τέχνη σε παλαιότερους καιρούς, και μεγάλο μέρος της επιστήμης της φιλολογίας των τελευταίων αιώνων υπάρχει, ακριβώς, για να αποκαταστήσει τα αρχικά νοήματα, που δεν ήταν πολλαπλά ή, πάντως, τυχαία ή αυθαίρετα.

С: Καλύψατε το πρώτο σκέλος, λέγοντας ότι ένα λογοτέχνημα δεν είναι αναγκαστικά ανοικτό σε πολλαπλές ερμηνείες...

Α.Δ.: Ναι, ότι σε μεγάλο βαθμό αυτό είναι σημείο των καιρών, ότι δεν είναι στην πεμπτούσια, στον ορισμό, αν θέλετε, της αφηγηματικής λειτουργίας.

С: ...Κι όσο για το δεύτερο; Ότι «ένα μαθηματικό θεώρημα είναι ανοικτό σε μια μόνο ανάγνωση»; Το αμφισβητείτε και αυτό;

Α.Δ.: Αυτή την τοποθέτηση θα την απέδιδα περισσότερο σε μια συγκεκριμένη μυθολογία σχετικά με τα μαθηματικά (η «κορωνίς των επιστημών», «το τελευταίο οχυρό της απόλυτης αλήθειας», κτλ.) παρά στην ίδια τους τη φύση. Γιατί είναι να μιλήσουμε για «μια και μόνο ανάγνωση» ενός θεωρήματος, πρέπει να μιλήσουμε για μια και μόνο σημασία, και μόλις βάλουμε αυτή την έννοια στο παιχνίδι τα νερά θολώνουν. Ας το σκεφτούμε: αλήθεια, τι πάει να πει *σημασία* στα μαθηματικά; *Τι σημαίνει* ένα θεώρημα, σε τελευταία ανάλυση; Τι σημαίνει, για παράδειγμα, το πυθαγόρειο; Κάθε προσπάθεια απάντησης αυτού του ερωτήματος ή θα επαναλάβει το θεώρημα σε μια παρόμοια διατύπωση («σημαίνει ότι το τετράγωνο της υποτεινούσας...», κτλ.) ή θα μεταφράσει σε άλλο επίπεδο μαθηματική γλώσσα, γενικεύοντας («σημαίνει ότι σε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα υπάρχει μια σταθερή σχέση... κτλ.») ή θα το αναγάγει σε κάτι άλλο, έναν αλγόριθμο, για παράδειγμα, κατασκευής ορθογωνίων τριγώνων, κ.ο.κ., ή μπορεί και να οδηγή κάποιους σε τελειώς άλλους χώρους, με συμπεράσματα του τύπου «δείχνει ότι υπάρχει αρμονία στο σύμπαν» ή άλλα. Αυτό όμως δεν πρέπει διόλου να μας εκπλήσσει: είναι η συνηθισμένη κατάσταση στη *σημαντική*, όπου κάθε απάντηση στο ερώτημα «τι σημαίνει» κάτι τελικά πηγαιίνει σε μια άλλη έννοια της σημασίας.

Ας δούμε όμως κάτι ακόμη απλούστερο από ένα θεώρημα, μια απλή συμβολική έκφραση, π.χ. την έκφραση (α+β)² – προσέξτε, εδώ δεν έχουμε μια ταυτότητα αλλά απλά ένα στοιχείο της: σε αντιστοιχία με τη γλώσσα θα λέγαμε μια «λέξη», όχι «πρόταση». Τι *σημαίνει* λοιπόν η έκφραση (α+β)²; Ένας μαθητής του γυμνασίου μπορεί να πει «σημαίνει να προσθέσουμε το α στο β και να το πολλαπλασιάσουμε όλο με τον εαυτό του», πράγμα που είναι σωστό βέβαια και αποτελεί απλώς λεκτική μεταγραφή του συμβολισμού. Ή, ένας μαθητής του λυκείου, κάπως πονηρμένος, θα πει ότι «σημαίνει α²+2αβ+β²», γιατί ξέρει ότι μπορεί να αντικαταστήσει την πρώτη έκφραση με τη δεύτερη, που αποτελεί ανάπτυξη της σύμφωνα με το διώνυμο του Νεύτωνα (για περίπτωση του κανόνα μεταγραφής, που ανέφερα πρωτότερα). Όπως και δυο διαφορετικοί μαθηματικοί, ένας χ ή ένας ψ, μπορούν να διαβάσουν την έκφραση (α+β)² ο καθένας στο δικό του ειδικότερο πλαίσιο, και να δει ο καθένας μέσα στη άλλη σημασία, που ίσως πηγάει από τη συγκεκριμένη χρήση στην οποία την υποβάλλει. Και ενώ κανείς από τους δύο δεν θα διαφωνεί με τη μεταγραφή («σημασία») α²+2αβ+β², στις δικές τους χρήσεις μπορεί αυτή να μη μπαίνει στο παιχνίδι. Με άλλα λόγια, υπάρχουν πολλές σημασίες ακόμη και για το πιο απλό πράγμα, που μπορεί βέβαια να μην βρίσκονται διόλου σε αντίθεση μεταξύ τους. Να κι ένα παράδειγμα λίγο πιο προχωρημένο. Έχουμε το Z, όπως συμβολίζουν στα μαθηματικά το σύνολο των *ακεραίων* αριθμών, δηλαδή των λεγόμενων *φυσικών*, 1, 2, 3, κτλ. μαζί με το 0 και τους αρνητικούς ακεραίους, -1, -2, -3, κτλ. Αν ρωτήσετε έναν κλασικό αριθμοθεωρητικό «τι σημαίνει Z», θα πει μάλλον το «σύνολο των ακεραίων». Ένας αλγεβριστής στο (ίδιο πάντα) Z θα δώσει τη σημασία «ομάδα των ακεραίων» (δηλαδή τη πρόσθεση, υπό κάποιους συγκεκριμένους κανόνες), ενώ ένας τοπολόγος το ίδιο πάλι Z, η ομάδα των ακεραίων, θα σας πει ότι είναι – σημαίνει γι’ αυτόν δηλαδή – «η θεμελιώδης ομάδα του δίσκου» (fundamental group of the disk), που είναι η συνηθισμένη λειτουργία του Z στο αντικείμενό του. Δηλαδή, ακόμη και μια βασικότερη μαθηματική έννοια, όπως είναι οι ακεραίοι – μια βασική έννοια, όχι ολόκληρο θεώρημα – είναι διαφορετική για τον καθένα! Φυσικά, τα νοήματα αυτά δεν αντιφάσκουν μεταξύ τους. Αλλά και αντιφατικά νοήματα μπορούμε να βρούμε στα μαθηματικά. Φερ’ ειπείν, η οδηγία «από ένα σημείο α εκτός της ευθείας γ φέρε μία παράλληλο προς τη γ» έχει τελειώς άλλη σημασία στην *ευκλείδεια* γεωμετρία, όπου υπάρχει μία και μόνο μία τέτοια παράλληλος, άλλο στην *υπερβολική*, όπου υπάρχουν άπειρες, και άλλο στην *ελλειπτική*, όπου δεν υπάρχει καμία – και εδώ τα νοήματα δεν είναι καν συμβατά.

С: Αναφερθήκατε πριν σε μια «συγκεκριμένη μυθολογία περί των μαθηματικών». Πείτε μας κάτι περισσότερο γι’ αυτήν.

Α.Δ.: Ναι, και μένω αυτού θα συνεχίσω λίγο πάνω στο προηγούμενο, σημαντικό θέμα. Μελετώντας τα μαθηματικά, έχουμε *τα ίδια* τα μαθηματικά και τους μύθους περί αυτών. Ή – για να γίνω κι εγώ λίγο μεταμοντέρνος! – μπορούμε να πούμε ότι τα

«ίδια τα μαθηματικά» δεν υπάρχουν καν, έχουμε απλώς πολλούς μύθους για τα μαθηματικά, δηλαδή πολλές εναλλακτικές απόψεις. Από αυτές η πιο διαδεδομένη είναι η «πλατωνίζουσα» ιδεολογία, που γεννάται με και συντηρείται έμμεσα μέσα στα ίδια τα μαθηματικά (βλέπε και υποσημείωση 6), αποκτά όμως ισχύ ιδεολογική κυρίως από την κάπως αφελή γενίκευσή της από τον εξω-μαθηματικό πολιτισμό. Η άποψη αυτή συνοψίζεται μέεες άκρες στο ότι, μετά την παρακμή της θεολογίας, τα μαθηματικά είναι η μόνη μας πρόσβαση στην απόλυτη αλήθεια. Όμως, αν δει κανείς τα μαθηματικά από μέσα, όχι δηλαδή όπως διδάσκονται στο σχολείο ή καταγράφονται σε εκδοχές λίγο πολύ διδακτικές –αυτές ως επί το πλείστον είναι παιδιά της ιδεολογίας που ανέφερα–, αλλά πώς *φτιάχνονται* μέσα από την πρόοδο της έρευνας, τότε η έννοια της πολυσημίας είναι καίρια. Μάλιστα, θα έλεγα ότι για τον ερευνητή η πολυσημία της μαθηματικής αλήθειας μοιάζει πολύ στην πολυσημία της ανάγνωσης ενός λογοτεχνικού αφηγήματος από έναν επαρκή αναγνώστη. Γιατί μπορεί μεν το πυθαγόρειο θεώρημα στην αρχική, ευκλείδεια εκδοχή του –εμμένω επίτηδες στο κοινότατο παράδειγμα– να φαίνεται ότι αγγίζει κάποιο επιστημολογικό ιδανικό «απόλυτης αλήθειας». Όμως ο ερευνητής μαθηματικός έλκεται στη δουλειά του από την άγνοια, όχι τη γνώση, από τα ερωτηματικά, όχι τις βεβαιότητες. Για να οδηγηθεί στο καινούριο, που είναι ο σκοπός του, με κάποια έννοια θα πρέπει να *παραναγνώσει* το γνωστό. Φυσικά, ‘παρανάγνωση’ εδώ δεν σημαίνει *λανθασμένη* ανάγνωση, όπως και –πέραν ακραίας ερμηνείας του τύπου «θανάτου του συγγραφέα»– το ότι δεχόμαστε σε ένα λογοτεχνικό κείμενο εναλλακτικές αναγνώσεις δεν σημαίνει, δεν *πρέπει* τουλάχιστον να σημαίνει, απόλυτο χάος και αυθαιρεσία. (Το μυθιστόρημα του Βλάντιμιρ Ναμπόκοφ *Pale Fire* μας δίνει ένα εξάιτερο, ακραίο παράδειγμα του πόσο μακριά από την έννοια της λογοτεχνίας μπορεί να είναι μια παρατραβηγμένη, εντελώς αυθαίρετη ανάγνωση ενός κειμένου). ‘Παρανάγνωση’, όπως χρησιμοποιώ τον όρο, σημαίνει περισσότερο «ανάγνωση από άλλη ματιά», μια ματιά που επιτρέπει σε κάποιον να δει –σε ένα θεώρημα εν προκειμένω– κάτι που δεν το είδαν οι άλλοι. Όπως δηλαδή ο Σεζάν είδε τα μήλα με τελειώς άλλον τρόπο από ό,τι τα είχαν δει όλοι οι άλλοι ζωγράφοι πριν από αυτόν –όχι ψεύτικο, απλώς διαφορετικό– και ζωγραφίζοντάς τα με αυτόν τον τρόπο, οδήγησε εφεξής και τη δική μας ματιά σε άλλους δρόμους. Ίδια και ο Νιλς Χάϊνρικ Άμπελ και ο Εβαρίστ Γκαλουά είδαν, στις αρχές του 19ου αιώνα, *με τελειώς άλλο τρόπο* την έννοια της επίλυσης μιας αλγεβρικής εξίσωσης, τόσο «άλλο» μάλιστα που ένας μέσος φορέας της μαθηματικής ορθοδοξίας της εποχής του θα θεωρούσε τις απόψεις τους, αν όχι αρλούμπες, πάντως «άσχετες». Κι όμως, η συγκεκριμένη τους ‘παρανάγνωση’ είναι έκτοτε η βάση της σύγχρονης άλγεβρας.

Όπως λοιπόν και το πιο αυστηρά καθορισμένο στο νόημά του –τουλάχιστον ως προς τις προθέσεις του συγγραφέα– κείμενο μπορεί κανείς να το διαβάσει αλλιώς, χωρίς αναγκαστικά να το διαστρεβλώσει, έτσι μπορεί να διαβάσει αλλιώς και ένα μαθηματικό θεώρημα, και αυτές οι πολλαπλές

αναγνώσεις είναι που, καμιά φορά, επιτρέπουν την εξέλιξη. Πάρτε τη βιβλική *Γένεση*. Η *Γένεση* μπορεί να διαβαστεί κυριολεκτικά, οπότε αμέσως ο Άινστάιν και ο Δαρβίνος θέτουν εν αμφιβόλω την αλήθεια της, αφού ή η δική της εκδοχή για τη δημιουργία του κόσμου θα ισχύει, ή εκείνων. Αλλά αν κάποιος πιστός διαβάσει τη *Γένεση* μεταφορικά –πράγμα που από μια ορθόδοξη ματιά θα αποτελεί παρανόημα–, τότε μπορεί να χωρέσει και την επιστήμη στον κόσμο του, χωρίς να απειλείται από αυτήν, δηλαδή να έχουμε μια εξέλιξη, και ένα πάντρεμα διαφορετικών ιδεών. Αλλά «μεταφορικά» μπορεί να διαβαστεί και το πυθαγόρειο θεώρημα, και μια τέτοια ανάγνωση μπορεί να προσδιορίσει άλλους αξιωματικούς χώρους, που λίγο θυμίζουν το περιβάλλον όπου γεννήθηκε, την ευκλείδεια γεωμετρία. Τι είναι, για παράδειγμα, η μεγάλη ανακάλυψη του Καρτέσιου, η αναλυτική γεωμετρία, παρά μια *μεταφορά* της γεωμετρικής σκέψης σε αλγεβρική; Σκεφτείτε το: σε τι βαθμό διαφέρει, ως γνωστικό φαινόμενο, το να λες «η αγάπη μου είναι ένα κόκκινο τριαντάφυλλο», από το να λες «ο κύκλος είναι μια εξίσωση»; Και πώς ξεκινά η θεωρία Γκαλουά ή ο εξαιρετικά γόνιμος κλάδος της αλγεβρικής τοπολογίας; Από το ότι ο Εβαρίστ Γκαλουά και ο Ανρί Πουανκαρέ μετέφεραν την αλγεβρική δομή της ομάδας, ο πρώτος στη θεωρία των εξισώσεων και ο δεύτερος στη μελέτη των συνεχών μεταμορφώσεων του χώρου – σπουδές όπου «φυσικά» (διάβαζε: «ως τότε») δεν ανήκαν.

C: Μιλήσαμε πολύ για τις ομοιότητες. Ας μιλήσουμε όμως και για τις διαφορές: υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στην κατανόηση μιας μαθηματικής απόδειξης και στην κατανόηση μιας αφήγησης; Και, αν ναι, ποιες είναι;

A.Δ.: Κατ' αρχήν πριν πάμε στην κατανόησή τους, ας μιλήσουμε για τις διαφορές ανάμεσα στην ίδια την απόδειξη και την ίδια την αφήγηση. Μα ναι, φυσικά υπάρχουν διαφορές, δεν ισχυρίζομαι ότι αφήγηση και απόδειξη είναι το ίδιο και το αυτό – κάτι τέτοιο θα ήταν εντελώς παράλογο! Ξαναλέω ότι μιλώ για *ομομορφισμό*, δηλαδή για δύο διακριτά φαινόμενα που έχουν όμως κάποιες κοινές ιδιότητες, ειδικά από τη δομική ματιά. Ο ομομορφισμός –έχει σημασία να το θυμηθούμε πάλι– ορίζει την ομοιότητα ως προς συγκεκριμένες δομές, και στη δική μας περίπτωση ως προς τη δομή που ορίζεται από την αιτιακή σύνδεση (στην αφήγηση) και τη συνεπαγωγή (στην απόδειξη).

Χωρίς να είμαι τώρα έτοιμος να απαντήσω στο ερώτημά σας σε μεγάλο βάθος θα έλεγα, κάπως πρόχειρα, ότι η κυρίαρχη διαφορά ανάμεσα στην απόδειξη αυτή καθαυτή και την αφήγηση είναι ότι για την απόδειξη υπάρχει ένα κριτήριο *ορθότητας* που αναφέρεται κυρίως σε εσωτερικούς, «συντακτικούς» νόμους, το είδος δηλαδή της ορθότητας περί του οποίου θα μπορούσε θεωρητικά να αποφανθεί μια «λογική μηχανή» εφοδιασμένη με τους κατάλληλους κανόνες. Λέω βέβαια «θεωρητικά», μα κάτι τέτοιο έχει αρχίσει να γίνεται πια και στην πράξη, αφού ο κλάδος της τεχνητής νοημοσύνης που μελετά την αυτοματοποιημένη απόδειξη θεωρημάτων (automated theorem proving) έχει κατασκευάσει προγράμματα ελέγχου της ορθότητας αποδείξεων, που είναι μάλιστα πολύ αποτελεσματικά εφ'

όσον οι αποδείξεις είναι γραμμένες μέσα στα όρια κάποιας φορμαλιστικά ορθής γλώσσας.

Αντίθετα, για την αφήγηση στη γενική της μορφή, η *ορθότητα* δεν μπορεί πάντα να οριστεί –κυρίαρχη σημασία για την αφήγηση έχει η *πειστικότητα*, που αναφέρεται στο με πόση επιτυχία, τελικά, αναπαρίσταται ένας κόσμος νοημάτων. (Βέβαια και μια αφήγηση μπορεί να ελεγχθεί σε ορισμένες περιπτώσεις τυπικά, αλλά μόνο σε ακραίες περιπτώσεις είναι επαρκές ένα τέτοιο κριτήριο).⁵ Μα για τη διαφορά αυτή μεταξύ αφήγησης και απόδειξης ισχύει με κάποια έννοια η λογική του «η εξαίρεση που αποδεικνύει τον κανόνα». Θέλω να πω ότι για να βρω τις διαφορές ανάμεσα σε απόδειξη και αφήγηση αναγκαστικά θα μιλήσω για τα φαινόμενα *αυτά καθαυτά*. Αν αντίθετα έμενα στην ερώτησή σας για τις διαφορές στην *κατανόηση* αφήγησης και απόδειξης, το πράγμα γίνεται πιο δύσκολο, οι ομοιότητες είναι πολύ πιο ισχυρές από τις διαφορές – που μας δείχνει ότι όταν μπει μέσα η κατανόηση (δηλαδή οι ανθρώπινοι γνωστικοί μηχανισμοί) μοιάζουν ιδιαίτερα.

Γιατί το ότι είναι μια απόδειξη λογικά («συντακτικά») ορθή διόλου δεν την καθιστά *κατανοητή*, και μάλιστα όσο περισσότερο αφήνουμε την έννοια «σωστή διατύπωση μιας απόδειξης» στην άκρη, την έννοια δηλαδή που κυβερνά τη φορμαλιστική νοοτροπία στα μαθηματικά, από τον Ευκλείδη στον Frege, στα *Principia Mathematica* των Whitehead και Russell, στο έργο της ομάδας Bourbaki, μέχρι και στις μέρες μας και το automated theorem proving, και περνάμε στην εντελώς διαφορετική έννοια «κατανόηση της απόδειξης», έννοια δηλαδή που αφήνει την αφηρημένη, πλατωνική αντίληψη της μαθηματικής αλήθειας και αναφέρεται στις γνωστικές ικανότητες του ανθρώπινου νου, τόσο τα κριτήρια του τι είναι «καλή» απόδειξη ατονούν και υπάρχει μεγαλύτερη σχέση με κριτήρια που ισχύουν και στην αφήγηση. Αν μιλάμε για *κατανόηση* μιας απόδειξης, το «καλή απόδειξη» παύει πια να είναι ταυτόσημο με το «σωστή απόδειξη», όπως ισχύει λίγο πολύ στον φορμαλισμό. Και έτσι, χωρίς καλά-καλά να το καταλάβουμε, περνάμε από τον φορμαλισμό στη ρητορική, αφού και το να καταλάβουμε μια απόδειξη –όπως άλλωστε και το να μας συνεπάρει μια αφήγηση– είναι θέματα, τελικά, όχι μόνο αλήθειας (ενίοτε μάλιστα ούτε καν αλήθειας) αλλά *αποτελεσματικότητας της επικοινωνίας*.

Το αν η απόδειξη μιας πρότασης είναι τυπικά *σωστή*, το αν δηλαδή διανύει μια πλήρη, συντακτικά ορθή, άνευ αντιφάσεων διαδρομή από την εκφώνηση στο «όπερ έδει δείξαι» της, μπορεί θεωρητικά να το αποφασίσει και μια λογική μηχανή – αυτό είναι το όνειρο του χιλμπερτιανού φορμαλισμού, που αποτελεί, ίσως όχι συνειδητά, μακρινή κατάληξη του “calculus” του Λάιμπνιτς. Το αν όμως *κατανοεί* ένας άνθρωπος μια απόδειξη είναι εντέλει και υποκειμενικό, και εδώ υπεισέρχονται καιρία άλλες έννοιες όπως *ενδιαφέρον, ταύτιση, ανάπτυξη, συνεχής διατήρηση της προσοχής, εκφραστική οικονομία*, έννοιες με άλλα λόγια που συναντά κανείς και στην αφήγηση. Κι όμως –η δήλωση αυτή σίγουρα θα ξαφνιάσει τους μη-μαθηματικούς– τα κοινά αποδεκτά κριτήρια ορθότητας μιας απόδειξης στη μαθηματική

κοινότητα προσεγγίζουν πολύ περισσότερο στη δεύτερη κατηγορία, την αφηγηματική θα λέγαμε, κι όχι στην πρώτη, τη φορμαλιστική!

C: Πράγματι, αυτό ξενίζει. Κάποιος που κατοικεί «εκτός των τειχών» των μαθηματικών θα φανταζόταν ότι ο φορμαλισμός, ίσως και όπως τον εκφράζει στην ακραία μορφή ένα πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή, αποτελεί το πιο αποδεκτό κριτήριο επαλήθευσης.

A.Δ.: Ίσως θα το αποτελούσε σε κάποιον ιδανικό κόσμο. Όχι όμως στον πραγματικό, των σημερινών μαθηματικών, ακόμη και των πιο θεωρητικών και αφηρημένων. Και το πρόβλημα δεν είναι ότι δεν έχουμε ακόμη τα κατάλληλα μηχανήματα ή προγράμματα, είναι και φιλοσοφικό εντέλει, γενικότερης επιστημολογικής στάσης των μαθηματικών. Σκεφτείτε το: σε τι συνίσταται στα μαθηματικά το περίφημο *peer review*, δηλαδή η διαδικασία κρίσης στην οποία υποβάλλεται μια εργασία (που εδώ είναι κατά κανόνα η απόδειξη ενός ή περισσότερων θεωρημάτων) για να δημοσιευθεί σε ένα έγκυρο ειδικό περιοδικό; Μα, ακριβώς στο τεστ τού αν η ανάγνωση της εργασίας *πείθει* για την αλήθεια της απόδειξης τους ειδικούς αναγνώστες που θα ορίσει το περιοδικό! Ναι! Ακόμη και η συνθετότητα εννοιολογικά απόδειξη του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά από τον Andrew Wiles δημοσιεύθηκε εγκύρως, και άρα την αποδέχεται σήμερα η διεθνής μαθηματική κοινότητα, «απλώς» επειδή τρεις τέσσερις από τους, καμιά εικοσαριά όλους κι όλους, ανθρώπους στον πλανήτη που ήταν ικανοί να την καταλάβουν λεπτομερώς τη διάβασαν και αποφάνθηκαν ότι είναι σωστή. Αυτό αρκούσε, πάει και τέλειωσε: η απόδειξη πολιτογραφήθηκε πλέον *σωστή*, και ο Wiles μάζεψε ένα μάτσο βραβεία – και τα δικαίου το ο άνθρωπος, να' ναι καλά να τα χαίρεται! Όμως, η απόδειξη του περίφημου θεωρήματος των Τεσσάρων Χρωμάτων από τους Appel και Haken, η οποία είναι τόσο τεράστια (καθότι σε μεγάλο βαθμό παρήχθη με υπολογιστές) που δεν μπορεί να ελεγχθεί από τον ανθρώπινο νου χωρίς τη βοήθεια άλλων υπολογιστών –πράγμα που έχει γίνει, βέβαια, επανειλημμένως– θεωρείται από την επίσημη μαθηματική κοινότητα ακόμη σήμερα, κάπου τριάντα χρόνια από την ανακάλυψή της, αρετική, δηλαδή δεν αποτελεί ουσιαστικά μέρος των επίσημων μαθηματικών! Το φαντάζεστε; Έχουμε νίκη κατά κράτος της ρητορικής, θρίαμβο των σοφιστών, και μάλιστα μέσα στα άδυτα των πιο θεωρητικών ιδρυμάτων! Και να σκεφτείτε ότι η Αμερικανική Μαθηματική Εταιρεία, της οποίας το πιο έγκυρο περιοδικό δημοσίευσε την απόδειξη του Wiles, έχει στον θυρεό της το «μηδείς άγεωμέτρητος εισίτω». Το δίκως άλλο, θα τρίζουν τα κόκκαλα του Πλάτωνα!

Και για να προσγειώσω κάπως το θέμα κάνοντας μια πεζή αναφορά στα θέματα που αναπτύχθηκαν στη Μύκονο: η μεγάλη επιτυχία τα τελευταία χρόνια των βιβλίων όπως το *Χάος* του Γκλάικ, το *Τελευταίο Θεώρημα του Φερμά* του Σινγκ ή, πολύ πρόσφατα, η *Μουσική των Πρώτων* του Ντι Σατόι, οφείλεται ακριβώς στο ότι κάποιοι μαθηματικοί εγκαταλείπουν τα υψηλά, αλλά εντελώς στενά, κριτήρια του φορμαλισμού και αποφασίζουν να αγγίξουν τους εκτός των τειχών, *αφηγούμενοι* τα μαθηματικά – κι όπως

αποδεικνύεται από την πράξη, με μεγάλη επιτυχία. Ή, με άλλα λόγια: η ρητορική επιστρέφει στην αγορά, όπου ανήκει!

C: Κάτι άλλο τώρα. Οι μαθηματικοί αποτιμούν συγκριτικά διαφορετικές αποδείξεις του *ιδίου* θεωρήματος χρησιμοποιώντας κατηγορήματα όπως «κομψή απόδειξη» (εννοώντας, συνήθως, «σύντομη απόδειξη»), «εννοιολογική απόδειξη» (σε αντιδιαστολή με «υπολογιστική / αλγοριθμική απόδειξη»), κ.ά. Επιπλέον, για το ίδιο θεώρημα, μια απόδειξη μπορεί να μας δείχνει μόνο *ότι* το θεώρημα είναι αληθές υπό τις δεδομένες υποθέσεις, ενώ μια άλλη να μας δείχνει *επιπλέον γιατί* το θεώρημα είναι αληθές *μόνον* υπό τις δεδομένες υποθέσεις. Βέβαια, αυτά τα κριτήρια συγκριτικής αξιολόγησης αποδείξεων είναι μάλλον αόριστα. Ωστόσο, θα μπορούσαν να βρεθούν αναλογίες με την περίπτωση των αφηγήσεων;

A.Δ.: Χωρίς διάθεση να σας κολακεύσω, θα πω ότι το ερώτημά σας είναι οπουδαίο – ή, ακόμη σαφέστερα, ότι περιέχει στοιχεία μιας σειράς σημαντικών απαντήσεων. Γιατί αυτό που λέτε είναι ακριβώς στην καρδιά και του δικού μου θέματος, αυτού του οποίου το εύρος ορίζω με την έννοια «ποιητική του Ευκλείδη» ή, πιο χαλαρά, με τον τίτλο της ομιλίας μου στη Μύκονο: «Η ιστορία της απόδειξης είναι η απόδειξη» («The story of the proof is the proof»). Τα κριτήρια που αναφέρετε, η «κομψότητα» ή μη μιας απόδειξης –παρεμπιπτόντως, με ενθουσιάζουν ιδιαίτερα στις διαλέξεις των μαθηματικών αυτού του τύπου οι μεταφορικοί χαρακτηρισμοί αποδείξεων, λόγια όπως το “this is a really cute proof” ή, στο άλλο άκρο, “this big hairy monster!”– η αντίθεση λοιπόν «εννοιολογικό»/«υπολογιστικό», ή η άλλη, παραπλήσια, ανάμεσα σε «υπαρκτικές» και «κατασκευαστικές» αποδείξεις, αλλά, σε τελευταία ανάλυση, και τα ίδια τα βαθιά προβλήματα της φιλοσοφίας των μαθηματικών, όπως κυρίως οι διαφορές μεταξύ πλατωνισμού,⁴ ρομαλισμού, λογικισμού, ιντουισιονισμού και κονστρουκτιβισμού – ναι, όλα αυτά μπορούν να συζητηθούν πολύ φυσικά σε μια γλώσσα *παραμαθηματική*, δηλαδή που περιλαμβάνει τα μαθηματικά αλλά και χρησιμοποιεί έννοιες από τον χώρο της αφήγησης. Και με αυτή την έννοια μόνο να το δει κανείς, η σύζευξη μαθηματικών και αφήγησης –γιατί όταν βρίσκεις ομοιότητες φτιάχνεις γέφυρες, και όταν φτιάχνεις γέφυρες ενώνεις– ωφελεί ιδιαίτερα τα μαθηματικά.

Θα σας δώσω ένα παράδειγμα: Στη Μύκονο, παρουσίασα στο μαθηματικό κοινό την έννοια της ρωσικής ρομαλιστικής σχολής (προς αποφυγήν παρεξηγήσεων: εδώ εννοώ τη ρομαλιστική σχολή της λογοτεχνικής κριτικής, όχι των μαθηματικών!), που ορίζει τη διαφορά ανάμεσα σε *fabula* και *syuzhet*, όπως έχουν καθιερωθεί και διεθνώς να λέγονται, με άλλα λόγια στις έννοιες που διαφοροποιούν σε μια αφήγηση το πώς συνέβη από το πώς τη λέμε. Πάρτε για παράδειγμα ένα ιστορικό γεγονός, ας πούμε τη μάχη των Θερμοπυλών. Αφ’ ενός υπάρχει η *fabula*, η μία και μοναδική, ιδανική, πλήρης αφήγηση των γεγονότων, *όπως όντως έγιναν* (στην περίπτωση φανταστικής αφήγησης το «όπως όντως έγιναν» έχει την έννοια της απόλυτης χρονικής διάταξης και της μέγιστης δυνατής πληρότητας και λεπτομέρειας των γεγονότων), σειρά βέβαια

που, λόγω της θεωρητικής της πληρότητας και τελειότητας δεν μπορεί, κυρίως με την αφήγηση αληθινών περιστατικών, ποτέ να αποτυπωθεί, καθώς οποιαδήποτε συγκεκριμενοποίηση θα είναι αναγκαστικά, λόγω των περιορισμών της νόησης και της γλώσσας, ελλιπής. Από την άλλη όμως έχουμε για κάθε *fabula* πολλά (άπειρα, σ’ αλήθεια) δυνατά *syuzhet*, δηλαδή τις πιθανές εναλλακτικές αφηγήσεις των γεγονότων. Στο παράδειγμα της μάχης των Θερμοπυλών μερικά είναι: α) η αφήγηση της μάχης στα σχετικά κεφάλαια του Ηροδότου, β) οι αφηγήσεις των επιζησάντων Περσών – δυστυχώς Σπαρτιάτες δεν επέζησαν για να αφηγηθούν! – στα εγγόνια τους, γ) αυτή που μας δίνει η παλαιά ταινία, *Ο Λέων της Σπάρτης*, δ) αυτή που παρουσιάζει το πρόσφατο μπεστ-σέλερ του αμερικάνου συγγραφέα Στίβεν Πρέσφιλντ *Οι πύλες της φωτιάς*, και ούτω καθεξής. Αλλά και κάθε φορά που ένας δάσκαλος ξαναμιλάει για τη μάχη των Θερμοπυλών στα παιδιά του δημοτικού ή του γυμνασίου έχουμε ένα νέο *syuzhet*, εκτός κι αν παπαγαλίζει επακριβώς κι αυτός –όπως ζητά το σύστημα– μια από τους μαθητές– τις σχετικές σελίδες του σχολικού βιβλίου, οπότε έχουμε την επανάληψη ενός *syuzhet* ήδη γνωστού.

Βέβαια, η διαφοροποίηση *fabula/syuzhet* είναι ψωμοτύρι για τους αφηγηματολόγους. Όμως η εφαρμογή της στα μαθηματικά ήταν για τους μαθηματικούς της Μυκόνου κάτι εντελώς καινούριο. Φυσικά, το ότι έχει όντως εφαρμογή στα μαθηματικά η διαφοροποίηση, άπαξ και την πληροφορήθηκαν οι μαθηματικοί, ήταν αμέσως φανερό. (Μάλιστα ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς της παρέας, ο Barry Mazur, μου παρατήρησε αμέσως μετά την ομιλία το πόσο ενδιαφέρουσα του φαίνεται η έννοια). Βέβαια, για τον μη-πλατωνιστή μαθηματικό, η έννοια του τι είναι *fabula*, ή αν υπάρχει έστω, είναι πολύ συζητήσιμη. Για τον πλατωνιστή μαθηματικό, το ότι υπάρχει κάποιο στο νοητό σύμπαν μια ιδανική *fabula* του πυθαγορείου θεωρήματος, για παράδειγμα, είναι προφανές – ίσως σε μια τέτοια έννοια αναφερόταν, προσεγγιστικά, ο μέγας Paul Erdős, όταν μιλούσε για κάποιες αποδείξεις ότι είναι “from the Book”, εννοώντας ουσιαστικά «από το βιβλίο του Θεού»,

αυτός ο δηλωμένα άθεος. Και φυσικά για κάθε μαθηματική αλήθεια υπάρχουν πολλά, εν δυνάμει άπειρα, πιθανά *syuzhet* – για το πυθαγόρειο θεώρημα συγκεκριμένα νομίζω έχουν ήδη καταγραφεί πάνω από τετρακόσιες διαφορετικές αποδείξεις! Ενώ όμως οι διαφοροποιήσεις μερικών από αυτές και η ανακάλυψη καινούριων δεν είναι παρά απλά διανοητικά παιχνίδια, «σπαζοκεφαλιές», κατορθώματα τύπου Βιβλίου Γκίνες, μια καινούρια απόδειξη ενός γνωστού θεωρήματος (ένα δηλαδή συγκεκριμένο νέο *syuzhet*, γνωστής *fabula*) μπορεί κάποτε να χαράξει εντελώς καινούριους δρόμους. Έτσι, ενώ ένα θεώρημα ίσως ισχύει σε κάποιο αφηρημένο, κεντρικό εννοιολογικό σύμπαν – λέω «ίσως», για να μην πάρω εδώ θέση στο θέμα του μαθηματικού πλατωνισμού – και μας λέει κάποιο πράγμα, η κάθε του διαφορετική απόδειξη μας λέει ταυτόχρονα πολλά άλλα, «το ωραίο ταξίδι», που λέει ο Καβάφης, μας κάνει «πλούσιους με όσα μάθαμε στον δρόμο».⁷

Με άλλα λόγια: η εισβολή στην περί των μαθηματικών σκέψη κάποιας εννοιών αφηγηματολογικών, εδώ της διαφοράς *fabula/syuzhet*, και η παραδοχή –γιατί απλώς περί παραδοχής πρόκειται, μιας και αυτό συνέβαινε εδώ και αιώνες– ότι οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν και ουσιαστικά αφηγηματολογικές έννοιες μιλώντας ή και σκεπτόμενοι («κομψό», «εύπεπτο», «αποθητικό», «συναρπαστικό», «αποκρουστικό», «χαστικό», «μπερδεμένο», κτλ.) οδηγούν σε έναν νέο δρόμο σκέψης για τα μαθηματικά – δρόμο που δεν ακυρώνει την αξία των παλιών φυσικά. Ή, σωστότερα, οδηγούν σε έναν νέο φωτισμό ενός γνωστού δρόμου, νέο φωτισμό που μας αποκαλύπτει στροφές, διασταυρώσεις και παρακλάδια που μπορεί να είναι ιδιαίτερα γόνιμα για τα μαθηματικά.

C: Η παρουσίαση μαθηματικών προβλημάτων και εννοιών μέσα, παραδείγματος χάριν, από τη λογοτεχνία, μήπως όμως ενισχύει τον επιστημονισμό, την αντίληψη δηλαδή που καλλιέργει για τις επιστήμες μια ιδεολογία η οποία λέει ότι οι επιστήμες είναι για τους ειδικούς, απροσπέλαστες για το ευρύ κοινό, ότι χρειάζονται ειδικοί μεσολαβητές για να εκλαϊκεύσουν τα συμπεράσματά της;

A.Δ.: Κοιτάξε, δεν ξέρω σε τι ιδεολογικά παιχνίδια μας πάει η έννοια του επιστημονισμού, όπως τον λέτε, ούτε εξετάζω εδώ το από πού προέρχεται και ποδο οδηγεί, ιστορικά ή/και κοινωνικά, η αποδοχή του. Όμως θέλω να πω ότι για τα μαθηματικά αυτό που περιγράφετε σε κάποιο βαθμό *ισχύει σ’ αλήθεια!* Ναι, τα μαθηματικά, στις πιο προχωρημένες τουλάχιστον μορφές τους, είναι ακριβώς όπως λέτε, δηλαδή «για τους ειδικούς, απροσπέλαστα για το ευρύ κοινό». Έτσι όμως είναι κάθε πολύ εξειδικευμένη, δύσκολη γνώση, που απαιτεί χρόνια σκληρής προσπάθειας, υπομονής και συνειδητής εργασίας στην εκμάθησή της. Το να εννοήσει ένας εκπαιδευτικός του «ευρέος κοινού» στη λεπτομέρειά της, επί παραδείγματι, την απόδειξη του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά από τον Andrew Wiles, είναι τόσο δύσκολο και τόσο παράλογο να το ζητάμε, όσο το να μπορέσω εγώ να κάνω αριστοτεχνικούς ελιγμούς με ένα F-16 ή να διευθύνω την Ενάτη Συμφωνία! Και γιατί να μην είναι έτσι, άλλωστε; Τα μαθηματικά είναι *δύσκολα*, και η εννόηση των ανώτερων εννοιών τους – όχι η «ενμέρωση» γύρω από αυτές, αλλά η πραγματική εννόηση – απαιτεί αποθέματα ενέργειας, γνώσης, υπομονής και χρόνου, που θα ήταν παράλογο να απαιτούμε από το φιληνήμερο, έστω, εξωμαθηματικό κοινό.

Μάλιστα, για να μείνω μια στιγμή στην αναλογία με τη μουσική και την Ενάτη Συμφωνία, μπορεί να εγερθεί εδώ ένας αντίλογος: «Ναι μεν μπορεί ένα μέσο μέλος του ευρέος κοινού να μην μπορεί να διευθύνει την Ενάτη Συμφωνία, μπορεί όμως να την ακούσει και να την απολαύσει. Μπορεί όμως άραγε να γίνει το ίδιο και με το Τελευταίο Θεώρημα του Φερμά, μπορεί ο μη-ενήμερος περί μαθηματικών να ‘χρειέ’ την απόδειξη του Wiles;» Όμως το επείρημα αυτό, αν το κοιτάξουμε πιο

διεξοδικά, δεν αντέχει πολύ. Και πρώτα πρώτα γιατί σε μεγάλο βαθμό η σύνθεση ενός μουσικού έργου έχει ως στόχο την αισθητική τέρψη του κοινού – ενώ διόλου δεν τον έχει η απόδειξη ενός μαθηματικού θεωρήματος. Στη μουσική, η απόλαυση του ακροατή είναι άμεσο και άκρως επιθυμητό αποτέλεσμα της πράξης του συνθέτη, ενώ η ομορφιά ενός θεωρήματος είναι παρενέργεια της αλήθειας του, ποτέ αυτοσκοπός. Αλλά υπάρχει και ένας βαθύτερος αντίλογος: η απόλαυση της Ενάτης Συμφωνίας που νιώθω εγώ, ο εντελώς άξεστος από πλευράς μουσικής παιδείας, είναι σίγουρα τελειώς άλλης υφής από αυτή που αξιώνεται ένας βαθύς γνώστης της μουσικής. Δεν λέω βέβαια ότι η δική του είναι «καλύτερη» ή «ανώτερη» – στην τέχνη οι αξιολογικές αποτιμήσεις αυτού του τύπου γεννούν πάντα ερωτήματα. Όμως είναι σίγουρα διαφορετική και οπωσδήποτε πιο δισδυτική από τη δική μου. Ο ενήμερος ακροατής καταλαβαίνει το έργο καλύτερα και τούτο πάει να μη καταρхήν –για να μη μπλέξουμε– ότι *ακούει πολύ περισσότερα πράγματα από εμένα*, η αντίληψή του για τις διαστάσεις του είναι πολύ οξύτερη και πολύ λεπτομερέστερη. Φυσικά ο ειδικός, ίσως αντιτάξει πάλι κάποιος, μπορεί να «κάνει το δάσος για τα δέντρα», μπορεί η γνώση του της μορφής να αποβαίνει τελικά καταπιεστική, αντί να λειτουργεί ως φωτισμός, να καταντά παρωπίδες. Χωρίς αμφιβολία. Αλλά, παρ’ όλα αυτά, ένας «καλός ακροατής» (δηλαδή καλοπροαίρετος, που δεν ενδίδει στις επαγγελματικές διαστροφές), που είναι και γνώστης της μουσικής, είναι σίγουρα καλύτερος από τον «καλό ακροατή» που δεν είναι.

Το ίδιο συμβαίνει και στα μαθηματικά, μόνο που εδώ είναι πιο σαφές και πιο διακριτό. Μάλιστα, εδώ δεν υπάρχει καν ο κίνδυνος της πιο

«μπλαζέ» αντίδρασης του ειδικού, που θα είναι ίσως απόρροια οικειότητας και συνήθειας. Όσο πιο βαθύς γνώστης ενός μαθηματικού κλάδου είναι ένας αναγνώστης μιας απόδειξης, τόσο περισσότερο θα την απολαύσει πνευματικά και αισθητικά και τόσο περισσότερο θα εκτιμήσει το πραγματικά δύσκολο και σπουδαίο – που για τον μη-ειδικό θα είναι σαν να είναι γραμμένο στα γαπωνέζικα. Και με τα γαπωνέζικα να τελειώσω, γιατί είπα πολλά. Σκεφτείτε ένα σπουδαίο γαπωνέζικο λογοτέχνημα, ένα χαικού του Μπασό ή ένα έργο θεάτρου Νο του Ζεάμι, για παράδειγμα. Εγώ ή εσείς – συγχωρέστε με, αλλά προχωρώ εδώ βάσει της υπόθεσης ότι ούτε και εσείς ξέρετε γαπωνέζικα – μπορεί να το διαβάσουμε σε μετάφραση και κάτι να καταλάβουμε από αυτό, κάτι να χαρούμε. Όμως, μόνο ένας γερός γνώστης της πρωτότυπης γλώσσας του θα αξιωθεί να εισπράξει το νόημά του βαθύτερα, διαβάζοντάς το στα γαπωνέζικα. Όπως στην ποίηση, λοιπόν, η βαθειά απόλαυση προϋποθέτει βαθειά γνώση, έτσι και στα μαθηματικά. Όμως και οι «ειδικοί μεσολαβητές», όπως τους λέτε, που παρουσιάζουν τα συμπεράσματα αυτά σε ένα ευρύτερο κοινό, έχουν κι αυτοί τον ρόλο τους, όπως τον έχουν και οι μεταφραστές της ποίησης. Η αλήθεια ίσως να έχει μια και μοναδική όψη στο ιδανικό πλατωνικό σύμπαν, στο σύμπαν που κατοικείται από μαθηματικές *fabulas*. Όμως σε αυτές δεν έχουμε πρόσβαση, μόνο στα πολλαπλά *syuzhets* τους. Κι όσο περισσότερα έχουμε, όσο η αλήθεια γίνεται κτήμα των ανθρώπων, με όποιον τρόπο, άλλον για τον καθένα, δηλαδή όσο περισσότερα εργαλεία, γλώσσες, μεταφράσεις και παραφράσεις έχουμε, τόσο καλύτερα νομίζω!

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

¹ Στο Jerome Brunner, *Actual minds, possible worlds*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1986.

² Μέρος της θα είναι σύντομα στην ιστοσελίδα του συνεδρίου, που βρίσκεται στο www.thalesandfriends.org ακολουθώντας το link Mykonos meeting.

³ Ένα πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα ομομορφισμού, αυτό από την τοπολογία, είναι ο λεγόμενος συνεχής μετασχηματισμός, όπου δύο αντικείμενα είναι ομομορφικά αν μπορούμε να πάμε από το ένα στο άλλο χωρίς να «κόψουμε» ή να «κολλήσουμε». Έτσι, ένα ψωμάκι δεν είναι ομομορφικό με ένα θεσσαλονικικό κουλούρι, καθώς το δεύτερο έχει στη μέση μια τρύπα, άρα πρέπει να κόψουμε (τρυπήσουμε) τη ζύμη για να το φτιάξουμε, ειδάλλως να κάνουμε μια ροδέλλα και να κολλήσουμε τις άκρες. Όμως, ένα μεγάλο φλυτζάνι του καφέ *είναι* ομομορφικό με το κουλούρι αφού –αν υποθέσουμε ότι και τα δυο είναι από το ίδιο εύπλαστο υλικό– το ένα μπορεί να μετασχηματισθεί στο άλλο μόνο ζουλώντας και τραβώντας, όχι κόβοντας ή κολλώντας. Φυσικά το ότι είναι ομομορφικά διόλου δεν σημαίνει ότι είναι ίδια!

⁴ Τις περισσότερες μπορεί ο αναγνώστης να βρει στην ιστοσελίδα μου, στο www.apostolosdoxiadis.com ακολουθώντας το link Works και από εκεί το Essays.

⁵ Για παράδειγμα, ένα «πρόγραμμα ελέγχου αφηγήσεων» εφοδιασμένο με ρομαλιστικούς κανόνες θα μπορούσε εύκολα να αποφανθεί ότι η φράση «ο Γιώργος πήγε στη θάλασσα και» είναι ελλιπής ως αφήγηση, και η σειρά προτάσεων «ο Νίκος πεινάει, το φεγγάρι περιστρέφεται γύρω από τη γη, οι κροκόδειλοι ζουν στον Αμαζόνιο, τα μήλα είναι κόκκινα, η Κική δεν πάει στο σχολείο» δεν συνιστά αφήγηση αλλά παράθεση, γιατί δεν υπάρχει καμία αιτιακή σύνδεση, συμπέρασμα που μπορεί να συναχθεί και από ρομαλιστικού τύπου συντακτικό-λεκτικό έλεγχο.

⁶ Την έννοια «πλατωνισμός» τη χρησιμοποιούμε στη φιλοσοφία των μαθηματικών, και κατ’ επέκταση στα ίδια τα μαθηματικά, με εντελώς συγκεκριμένο τρόπο – και πρέπει αυτό να το ξεκαθαρίσω πριν τελειώσω, ιδιαίτερα μιας και μιλώ σε φιλοσοφικό περιοδικό, προς αποφυγήν παρεξηγήσεων. Ο μαθηματικός πλατωνισμός είναι μια θέση για την οντολογία των μαθηματικών εννοιών. Υποστηρίζει μέρες άκρες ότι η μαθηματική αλήθεια υπάρχει σε ένα νοητό σύμπαν ανεξάρτητα από την ανθρώπινη ικανότητα να την προσεγγίσει – και με αυτή την έννοια οι μαθηματικοί *ανακαλύπτουν* ένα μαθηματικό θεώρημα με την ίδια έννοια που ο Κολόμβος ανακάλυψε την Αμερική: δηλαδή, φέρνουν μέσα στα όρια της ανθρώπινης γνώσης κάτι που προϋπάρχει αλλά ως τότε ήταν εκτός ορίων. Υπάρχουν πολλές στάσεις απέναντι στον μαθηματικό πλατωνισμό, και στο άκρο αντίθετο του βέβαια είναι ο κονστρουκτιβισμός, που λέει ότι οι μαθηματικές αλήθειες κατασκευάζονται, με την έννοια που κατασκευάζουμε, π.χ., ένα ρολόι ή μια ντζελομπαχανή, κάτι που δεν προϋπάρχει στη φύση. Πέρα όμως από την καθαρά φιλοσοφική στάση γύρω από τον πλατωνισμό που μπορεί να δηλώνει ή και να υποστηρίζει ένας μελετητής των μαθηματικών, ή ένας φιλόσοφος, είναι περίπου κοινά αποδεκτό στη μαθηματική κοινότητα ότι σχεδόν όλοι οι θεωρητικοί μαθηματικοί αποδέχονται στην καθημερινή τους πρακτική, σιωπηλά αλλά ουσιαστικά, τον πλατωνισμό, έστω κι αν έχουν –όπως πολλοί έχουν– διαφορετικές δηλωμένες φιλοσοφικές απόψεις περί των μαθηματικών. Αυτό το φαινόμενο περιγράφηκε πρόσφατα χαριτωμένα με τη φράση «οι ερευνητές μαθηματικής είναι πλατωνιστές πέντε μέρες τη βδομάδα», με την έννοια ότι η έμμεση –«αφελή» θα μπορούσαμε να την πούμε– αποδοχή της απόλυτης αξίας της μαθηματικής αλήθειας είναι η δύναμη που τους συντηρεί όσο κινούνται στον αφηρημένο χώρο της έρευνας – έστω κι αν διαφωνούν με αυτή θεωρητικά. (Το θέμα του πλατωνισμού, ή μη, στην πρακτική ενός μαθηματικού ερευνητή συζητείται αρκετά, έμμεσα αλλά και άμεσα, και στο μυθιστόρημά μου *Ο Θείος Πέτρος και η Εικασία του Γκόλντμπαχ*).

⁷ Δίνω ως ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα το λεγόμενο Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών, που αφορά στην κατανομή των πρώτων αριθμών μέσα στους φυσικούς. Ενώ λοιπόν είχε αποδειχθεί στα τέλη του 19ου αιώνα με τεχνικές της ανάλυσης από τους Hadamard και de la Vallée Poussin, η απόδειξή του με άλλον τρόπο, τον αποκαλούμενο ‘*στοικειώδη*’ – που μόνο στοιχειώδης δεν είναι βέβαια! – ήταν τόσο επαναστατική που ο άνθρωπος ο οποίος τη βρήκε, ο Atle Selberg (εδώ υπάρχει και ένα μεγάλο ιστορικό θέμα, παράλληλης ανακάλυψης από τον Erdős, που δεν αναγνωρίστηκε στην εποχή της), πήρε γι’ αυτήν το Μετάλλιο Φίλντς, το αποκαλούμενο «Νόμπελ των μαθηματικών». Με άλλα λόγια, ένα γνωστό θεώρημα, ξανααποδεικνυόμενο, αποτέλεσε γεγονός σχεδόν μεγαλύτερο από την αρχική απόδειξη – ακριβώς λόγω των άλλων, νέων μονοπατιών που διανύθηκαν με την απόδειξη.

