Άρις Αραγεώργης

# παραδοξολογίες & παιχνίδια

## Δεν υπάρχει χρόνος για σένα!

«Μια αιωνιότητα για 'σένα μπορεί να είναι μια ημέρα για μένα. Επιτέλους, υπάρχει αρκετός χρόνος για 'μένα!» σκέφτηκε ο Άλεφ.

Ο Άλεφ, από μικρός, έβαζε πολύ υψηλούς στόχους στη ζωή του. Οι στόχοι αυτοί δεν είχαν σχέση με το χρήμα ή τη δόξα μολονότι εκείνη την εποχή λειτουργούσαν σε πολλά μέρη «εργαστήρια φήμης» που υπόσχονταν πλούτο και φήμη σε φιλόδοξους νέους – κυρίως, τραγουδιστές. Για τον Άλεφ οι στόχοι που επέλεγαν οι περισσότεροι συνομήλικοί του ήταν απλώς στατιστικώς απίθανοι. Εκείνος ενδιαφερόταν για στόχους που έμοιαζαν να είναι λογικώς αδύνατοι. Έτσι όταν πρωτοδιδάχτηκε αριθμητική επιχείρησε να γράψει το σύνολο των φυσικών αριθμών με απαρίθμηση όλων των στοιχείων του. Κι όταν πρωτοδιδάχτηκε ευκλείδεια γεωμετρία αποπειράθηκε να υπολογίσει ολόκληρο το δεκαδικό ανάπτυγμα του αριθμού π. Δάσκαλοι και φίλοι τού επεσήμαιναν διαρκώς το μάταιο τέτοιων προσπαθειών. Του έλεγαν: «Είναι παράλογο να επιλέγεις τέτοιους στόχους! Δεν υπάρχει ο χρόνος για σένα;». Ο Άλεφ, βέβαια, είχε κατανοήσει τη δυσκολία τέτοιων εγχειρημάτων που ο ίδιος ονόμαζε *υπερστόχους*: δεδομένου του πεπερασμένου του διαθέσιμου χρόνου, ένας υπερστόχος απαιτεί την εκτέλεση ενός *άπειρου* πλήθους πράξεων ή ενεργημάτων σε *πεπερασμένο* χρονικό διάστημα. Παρ' όλα αυτά, στα χρόνια του λυκείου και του πανεπιστημίου, εξακολουθούσε την απαρίθμηση του συνόλου των φυσικών αριθμών – έτσι για να περνάει ευχάριστα την ώρα του κατά τη διάρκεια βαρετών μαθημάτων ή διαλέξεων.

Επέλεξε να σπουδάσει μαθηματικά και φιλοσοφία – όπως είπαμε, αδιαφορούσε πλήρως για τις συνήθεις πολυτέλειες της ζωής. Οι σπουδές αναζωπύρωσαν το ενδιαφέρον του για τους υπερστόχους. Έμαθε να πραγματεύεται αυστηρά την έννοια του απείρου στο πλαίσιο μαθηματικών θεωριών όπως η θεωρία συνόλων και ο απειροστικός λογισμός. (Και, κατά περίεργο τρόπο, αυτή η γνώση τον βοήθησε να καταλάβει καλύτερα τον εαυτό του – πράγμα που δεν συμβαίνει σε άλλους μαθηματικούς). Παράλληλα καλλιέργησε το φιλοσοφικό του ενδιαφέρον για την έννοια του απείρου, αλλά και για το «Εγώ», στα σεμινάρια δύο καθηγητών που επηρέασαν σημαντικά τη σκέψη του. Ο ένας από αυτούς, ο Zen, ήταν γηραιός καθηγητής της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας με προκλητικές, αλλά και πάντα επίκαιρες, θέσεις. Ο δεύτερος, ο Bro, ήταν πολύ νεότερος από τον Zen, μαθηματικός με σημαντική συμβολή στην τοπολογία και ρηξικέλευθες απόψεις για τη μαθηματική πρακτική αλλά και τη λογική.

Η διδασκαλία του Zen ενδυνάμωσε την άποψη του Άλεφ ότι είναι εφικτή η πραγματοποίηση υπερστόχων. Μάλιστα, μερικές τετριμμένες πράξεις της καθημερινότητας, όπως ένας συνηθισμένος περίπατος από ένα σημείο Α σε ένα διαφορετικό σημείο Β του χώρου, φαίνονταν να προϋποθέτουν την ολοκλήρωση υπερστόχων. (Ένας περίπατος δικαιούται τον χαρακτηρισμό «συνηθισμένος» μόνο αν αφορά την κάλυψη πεπερασμένης απόστασης σε πεπερασμένο χρόνο). Πράγματι, για να μεταβεί ο περιπατητής από το Α στο Β φαίνεται ότι πρώτα πρέπει να καλύψει το $\frac{1}{2}$ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, μετά το $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ του ΑΒ, μετά το $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ του ΑΒ, κ.ο.κ. Έτσι όταν ο περιπατητής φτάσει στο Β φαίνεται να έχει εκτελέσει ένα άπειρο πλήθος ενεργημάτων σε πεπερασμένο χρόνο. Το εντυπωσιακό είναι ότι οι άνθρωποι κατορθώνουν να ολοκληρώσουν τέτοιους περιπάτους! Και ο Άλεφ είχε αφθονία προσωπικών εμπειριών που επικύρωναν αυτόν τον ισχυρισμό: κάθε μέρα πήγαινε από το υπνοδωμάτιό του στο λουτρό, από το σπίτι του στο πανεπιστήμιο, από το πανεπιστήμιο στην αγορά, κλπ. Και για καθεμία από αυτές τις διαδρομές χρειαζόταν πάντοτε μόνο κάποιο κλάσμα ή πολλαπλάσιο της μιας ώρας. Βέβαια, η μαθηματική του παιδεία παρείχε μια εύκολη απάντηση στο «παράδοξο του περιπάτου»: η σειρά $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ έχει άθροισμα 1. Αλλά το να πει κανείς ότι η σειρά $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\dots$ έχει άθροισμα 1 ισοδυναμεί με το να πει ότι η διαφορά του αριθμού 1 από τους διαδοχικούς όρους της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},\dots$, γίνεται προοδευτικά μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό, οσοδήποτε μικρό. Με βάση αυτή την παρατήρηση, η «εύκολη απάντηση» φαίνεται ύποπτη: ή απλώς προϋποθέτει αυτό που θέλει να δικαιολογήσει (συγκεκριμένα, ότι είναι εφικτή η ολοκλήρωση υπερστόχων) ή συνάγει μια εμπειρική πρόταση (συγκεκριμένα, ότι ο περιπατητής θα βρεθεί στο σημείο Β μετά την πάροδο πεπερασμένου χρονικού διαστήματος) από έναν απλό μαθηματικό ορισμό. Και ο Άλεφ ήθελε να κατανοήσει βαθύτερα το ζήτημα. Εξάλλου τον γοήτευαν οι διδασκαλίες της φιλοσοφικής σχολής στην οποία ανήκε ο Zen – ιδιαίτερα η θέση ότι το όντως ον είναι άχρονο. Η θέση αυτή έκανε τον Άλεφ να θυμάται με ειρωνικό χαμόγελο το «Δεν υπάρχει ο χρόνος για σένα;» των δασκάλων και φίλων της παιδικής και εφηβικής του ηλικίας.

Μετά από σκέψη, ο Άλεφ άρχισε να κλίνει προς την άποψη ότι ένας συνηθισμένος περίπατος δεν συγκροτεί γνήσιο υπερστόχο. Η αίσθηση του παραδόξου φαίνεται να προκύπτει από την αυθαίρετη διαίρεση μιας διαδικασίας με καλώς ορισμένη αρχή και τέλος σε ένα άπειρο αριθμήσιμο πλήθος υποδιαδικασιών. Αντίθετα, η τελική κατάσταση του κόσμου μετά από την εκτέλεση ενός γνήσιου υπερστόχου δεν φαίνεται να είναι καλώς ορισμένη. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι ένας υπερστόχος Υ που αποτελείται από την άπειρη ακολουθία ενεργνημάτων $(\mathbf{a_1, a_2,\ldots,a_n,\ldots})$, όπου κάθε ενέργημα $\mathbf{a_n}$ συνίσταται στη μεταβολή της κατάστασης του κόσμου από $\mathbf{S}$ σε $\mathbf{a_n(S)}$, πραγματοποιείται σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα, από τη χρονική στιγμή $\mathbf{t=0}$ έως τη χρονική στιγμή $\mathbf{t=\tau^*}$. Ποια θα είναι η τελική κατάσταση του κόσμου μετά την ολοκλήρωση του Υ αν η αρχική κατάσταση ήταν $\mathbf{S_0}$; Η σταδιακή εκτέλεση του Υ παράγει διαδοχικά τις καταστάσεις $\mathbf{a_1(S_0)}$, $\mathbf{a_2(a_1(S_0)),\ldots, a_n(a_{n-1}(\ldots(a_2(a_1(S_0)))\ldots))}$,. Αλλά μια άπειρη ακολουθία δεν έχει τελευταίο όρο! Από την άλλη, ο κόσμος πρέπει να βρίσκεται σε μια καλώς ορισμένη κατάσταση κατά τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau^*}$!

Παρόμοιες σκέψεις οδήγησαν τον Άλεφ να εξετάσει το δυσάρεστο για αυτόν ενδεχόμενο μήπως τελικά η εκτέλεση ενός γνήσιου υπερστόχου είναι όντως λογικώς αδύνατη. Οι αμφιβολίες του είχαν ενισχυθεί από τις διδαχές του Bro. O Bro τον είχε προειδοποιήσει ότι οι υπερστόχοι δεν είναι νόμιμο αντικείμενο μελέτης αφού προϋποθέτουν την αντικειμενοποίηση του απείρου. Του είχε πει: «Βρίσκεσαι πάντοτε βυθισμένος μέσα στον χρόνο. Δεν υπάρχει προνομιακός χρόνος για σένα από τον οποίο μπορείς να δεις μια άπειρη "ολότητα" ως τελειωμένο αντικείμενο σπουδής». Κατά τον Bro, όλη η μαθηματική δραστηριότητα εδραζόταν στη σταδιακή κατασκευή οντοτήτων στον νου του μαθηματικού και η έννοια της μαθηματικής αλήθειας αναγόταν σε μια έννοια κατασκευαστικής αποδειξιμότητας. Έτσι, για τον Bro, προτάσεις που ήταν τέτοιες ώστε να μην υπάρχει μέθοδος κατασκευαστικής απόδειξης ούτε για τις ίδιες ούτε για τις αρνήσεις τους απλώς στερούνταν αληθοτιμής – δεν ήταν ούτε αληθείς ούτε ψευδείς. Εκείνη την εποχή μια τέτοια πρόταση, γνωστή ως «εικασία του Gol», ήταν η εξής: κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 ισούται με το άθροισμα δυο πρώτων αριθμών. Και ο Bro αρνούνταν αυτό που άλλοι μαθηματικοί και φιλόσοφοι εκλάμβαναν ως αναμφισβήτητη αλήθεια: ή κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 ισούται με το άθροισμα δυο πρώτων αριθμών ή υπάρχει τουλάχιστον ένας άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 που δεν ισούται με το άθροισμα δυο πρώτων αριθμών.

Ο Άλεφ δεν ενστερνιζόταν τις φιλοσοφικές απόψεις του Bro. Τα «γούστα» του στη φιλοσοφία των μαθηματικών ήταν πιο κλασικά. Για τον Άλεφ, κάθε καλώς διατυπωμένη μαθηματική πρόταση ήταν ή αληθής ή ψευδής ανεξάρτητα από τις όποιες διαδικασίες στον νου του μαθηματικού. Η εικασία του Gol είχε ορισμένη αληθοτιμή, απλώς δεν γνώριζαν ακόμη ποια είναι αυτή. Και θα μπορούσαν να μάθουν εάν ήταν δυνατόν μια μηχανή να ελέγξει για κάθε άρτιο αριθμό $\mathbf{x}$ μεγαλύτερο του 2 αν υπάρχει κάποιο ζεύγος πρώτων αριθμών $\mathbf{y}$ και $\mathbf{z}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{x=y+z}$. Κατά τις οικείες του συνήθειες, ο Άλεφ είχε κάνει μόνος του τις πρώτες δοκιμές ($4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8 = 3+5$, …, $84 = 23+61$, …) χωρίς να βρει αντιπαράδειγμα στην εικασία του Gol. Ωστόσο, γνώριζε «βαθιά μέσα του» ότι ήταν δυνατόν να υπάρχει κάποιος πολύ μεγάλος άρτιος αριθμός που να μην μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα δυο πρώτων αριθμών. Και η δυσκολία του εγχειρήματος ήταν φανερή: ακόμη και αν μια μηχανή μπορούσε να προγραμματιστεί και να εφοδιαστεί με τα απαραίτητα υλικά υπολογισμού ώστε να επιχειρήσει μια εξαντλητική αναζήτηση αντιπαραδείγματος στην εικασία του Gol, πότε θα μάθαιναν οριστικά οι μαθηματικοί ότι η εικασία του Gol ήταν αληθής, αν πράγματι ήταν αληθής; Για να εξασφαλιστεί αυτή η δυνατότητα θα έπρεπε η μηχανή να μπορέσει να ελέγξει όλους τους άρτιους αριθμούς σε πεπερασμένο χρόνο. Και τούτο ισοδυναμεί με την εκτέλεση ενός σύνθετου υπερστόχου. Αλλά είναι δυνατή –πρώτα *λογικώς* δυνατή και ύστερα *φυσικώς* δυνατή– η εκτέλεση ενός υπερστόχου;

Η άποψη ότι η εκτέλεση ενός υπερστόχου ήταν λογικώς αδύνατη στηριζόταν τόσο σε βαθύτερες φιλοσοφικές ανησυχίες όσο και σε συγκεκριμένα παραδείγματα. Οι φιλοσοφικές ανησυχίες πήγαζαν από ένα γενικότερο δίδαγμα που είχαν αποκομίσει οι μαθηματικοί και που είχε αποτελέσει το εφαλτήριο βήμα για την ανάπτυξη της φιλοσοφίας του Bro και άλλων: η απρόσεκτη επέκταση εννοιών και μεθόδων από την περιοχή του πεπερασμένου στην περιοχή του απείρου οδηγεί σε αντινομίες. Τα συγκεκριμένα παραδείγματα αποτελούσαν περιγραφές υπερστόχων των οποίων η ολοκλήρωση δεν φαινόταν να είναι λογικώς δυνατή, γιατί ακριβώς θα οδηγούσε σε αντιφατικές περιγραφές της τελικής κατάστασης του κόσμου. Ένα τέτοιο παράδειγμα, «η λάμπα του Tho», έφερε το όνομα εκείνου που το επινόησε. Φανταστείτε ένα λαμπτήρα συνδεδεμένο με ένα διακόπτη πάνω σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα. Ο διακόπτης μπορεί να βρίσκεται σε κάθε χρονική στιγμή σε ακριβώς μία από δύο δυνατές θέσεις που αντιστοιχούν στις καταστάσεις «λάμπα αναμμένη» και «λάμπα σβηστή». Υποθέστε ότι αρχικά –ας πούμε, την ώρα **0:00:00** π.μ. μιας βροχερής νύχτας– η λάμπα είναι σβηστή και στη συνέχεια υποβάλλεται στην ακόλουθη λειτουργία: όταν έχει περάσει το **½** του χρόνου μέχρι τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau^*}$**=1:00:00** π.μ. (δηλαδή, στην **t=0:30:00** π.μ.) κλείνουμε τον διακόπτη και ανάβει η λάμπα, όταν έχει περάσει το **½+¼** του χρόνου μέχρι τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau^*}$**=1:00:00** π.μ. (δηλαδή, στην **t=0:45:00** π.μ.) ανοίγουμε τον διακόπτη και σβήνει η λάμπα, όταν έχει περάσει το **½+¼+⅛** του χρόνου μέχρι τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau^*}$**=1:00:00** π.μ. (δηλαδή, στην **t=0:52:30** π.μ.) κλείνουμε τον διακόπτη και ανάβει η λάμπα, κ.ο.κ. Έτσι μέχρι τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau^*}$**=1:00:00** π.μ. θα έχουμε εκτελέσει ένα άπειρο πλήθος πράξεων – άρα, έναν υπερστόχο. Το ερώτημα είναι: ποια θα είναι η κατάσταση της λάμπας κατά τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau^*}$; Σύμφωνα με ένα επιχείρημα του Tho, η λάμπα δεν θα είναι ούτε αναμμένη ούτε σβηστή. Δεν θα είναι αναμμένη γιατί δεν υπάρχει χρονική στιγμή **t** μεταξύ **0:00:00** π.μ. και **1:00:00** π.μ. κατά την οποία ανάβουμε τη λάμπα χωρίς να τη σβήσουμε αργότερα (σε κάποια χρονική στιγμή **t΄** μεταξύ **t** και **1:00:00**π.μ.). Και δεν θα είναι σβηστή γιατί δεν υπάρχει χρονική στιγμή **t** μεταξύ **0:00:00** π.μ. και **1:00:00** π.μ. κατά την οποία σβήνουμε τη λάμπα χωρίς να την ανάψουμε αργότερα (σε κάποια χρονική στιγμή **t΄** μεταξύ **t** και **1:00:00** π.μ.). Αλλά, εκ κατασκευής, η λάμπα πρέπει να είναι ή αναμμένη ή σβηστή κατά τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau^*}$. Έτσι φαίνεται να καταλήγουμε σε λογική αντίφαση.

Ο Tho είχε προσφέρει ένα ακόμη επιχείρημα για να καταδείξει το λογικώς αδύνατον της λειτουργίας της λάμπας του. Το επιχείρημα αυτό απέκλειε τις «εύκολες», αλλά ίσως απατηλές, λύσεις με τη βοήθεια της μαθηματικής θεωρίας των σειρών. Ας αποδώσουμε την τιμή 0 στη λάμπα όταν είναι σβηστή και την τιμή 1 όταν είναι αναμμένη. Τότε ένα άναμμα της λάμπας αντιστοιχεί στην πρόσθεση μιας μονάδας (από το 0 στο 1) ενώ ένα σβήσιμο της λάμπας στην αφαίρεση μιας μονάδας (από το 1 στο 0). Επομένως, η κατάσταση της λάμπας («αναμμένη» ή «σβηστή») κατά τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau^*}$, μετά την άπειρη ακολουθία εναλλασσόμενων αναμμάτων και σβησιμάτων, θα αντιστοιχεί στο άθροισμα της σειράς **1-1+1-1+1…**. Όμως, κατά την παραδεδομένη θεωρία των σειρών, η σειρά αυτή δεν έχει άθροισμα γιατί η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων, **1, 1-1, 1-1+1,1-1+1-1…**, δεν συγκλίνει σε ορισμένο όριο αφού οι διαδοχικοί της όροι εναλλάσσονται ως προς τις τιμές 1 και 0.

Ο Άλεφ, παρακολουθώντας τη σχετική βιβλιογραφία, κατέληξε να έχει σοβαρές αμφιβολίες για την εγκυρότητα των επιχειρημάτων του Tho. Όσον αφορά το πρώτο επιχείρημα, σκεφτόταν, γιατί να υποθέσουμε ότι η κατάσταση της λάμπας («αναμμένη» ή «σβηστή») κατά τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{\tau^*}$ συνάγεται λογικά μόνο από την περιγραφή των καταστάσεων («αναμμένη» ή «σβηστή») στις οποίες είχε βρεθεί η λάμπα πριν από την $\boldsymbol{\tau^*}$; Όσο για το δεύτερο επιχείρημα, γιατί να δεχθούμε ότι η τελική κατάσταση της λάμπας δίνεται από το ανύπαρκτο άθροισμα της σειράς **1-1+1-1+1…**; Μόνον επειδή η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων, **1, 1-1, 1-1+1,1-1+1-1…**, δίνει τις καταστάσεις της λάμπας μετά την 1η, τη 2η, την 3η, την 4η,… πράξη ανάμματος ή σβησίματος; Στο κάτω-κάτω, οι ιδιότητες που τυχόν μοιράζονται οι όροι μιας συγκλίνουσας ακολουθίας δεν είναι κατ' ανάγκην και ιδιότητες του ορίου της ακολουθίας αυτής.

Ο Άλεφ παραδεχόταν, ασφαλώς, ότι ακόμη και αν μερικοί υπερστόχοι ήταν λογικώς δυνατοί, αυτό δεν σήμαινε ότι θα ήταν και φυσικώς δυνατοί. Τα προβλήματα ήταν ποικίλα. Για παράδειγμα, τα μέρη μιας μηχανής που θα εκτελούσε έναν υπερστόχο θα έπρεπε να κινούνται όλο και ταχύτερα ώστε να επιτελούν τις διαδοχικές πράξεις που συναπαρτίζουν τον υπερστόχο σε όλο και μικρότερα πεπερασμένα χρονικά διαστήματα. Όμως η καλύτερη διαθέσιμη εκείνη την εποχή θεωρία για τον χωρόχρονο, η θεωρία του Ein, προέβλεπε ένα ανώτατο όριο ταχύτητας. Λύση στο πρόβλημα θα μπορούσε να προσφέρει μια μηχανή της οποίας τα μέρη απαιτείται να καλύπτουν όλο και μικρότερες αποστάσεις προκειμένου να εκτελούνται οι διαδοχικές πράξεις που συγκροτούν τον υπερστόχο. Και πάλι, όμως, η λειτουργία μιας τέτοιας μηχανής θα προϋπέθετε την αλήθεια διάφορων φυσικών αρχών – π.χ. της αρχής ότι κάθε κίνηση είναι συνεχής ακόμη και σε αυθαίρετα μικρές αποστάσεις.

Με σκοπό τη διερεύνηση τέτοιων ζητημάτων, ο Άλεφ στράφηκε στη μελέτη των θεωριών για τη φύση του χωροχρόνου. Εκεί ανακάλυψε ένα θαυμαστό νέο τρόπο για να ανακαλύπτει, με τη μέθοδο της εξαντλητικής αναζήτησης αντιπαραδείγματος, την αλήθεια ή το ψεύδος μιας πρότασης της θεωρίας των αριθμών όπως η εικασία του Gol. Το κλειδί ήταν μια από τις εννοιολογικές καινοτομίες της θεωρίας του Ein. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, ο χρόνος δεν είναι «ίδιος για όλους»: η χρονική διάρκεια μιας διαδικασίας διαφέρει ανάλογα με το σύστημα αναφοράς στο οποίο μετράται. Επιπλέον, είναι δυνατόν μια διαδικασία που διαρκεί άπειρο χρόνο ως προς ένα σύστημα αναφοράς να διαρκεί πεπερασμένο χρόνο ως προς ένα άλλο σύστημα αναφοράς. «Μια αιωνιότητα για σένα μπορεί να είναι μια μέρα για μένα. Επιτέλους, υπάρχει αρκετός χρόνος για μένα!», σκέφτηκε ο Άλεφ.

Η γενική στρατηγική για την αντιμετώπιση κάθε ανοικτού προβλήματος της θεωρίας αριθμών –ας πούμε, της εικασίας του Gol– φαινόταν πλέον απλή. Αρκεί κανείς να εκμεταλλευόταν έναν ιδιότυπο καταμερισμό εργασίας. Το σενάριο θα είχε ως εξής. Μια μηχανή που έχει στη διάθεσή της άπειρο ιδιόχρονο προς το μέλλον έχει προγραμματιστεί να ελέγξει αν η εικασία του Gol επαληθεύεται για τους αριθμούς 4, 6, 8,… διαδοχικά. Μια που είναι εύλογο οι υπολογισμοί για όλο και μεγαλύτερους αριθμούς να απαιτούν όλο και περισσότερο χρόνο, η μηχανή μπορεί να διαθέσει $\mathbf{f(n)}$ δευτερόλεπτα για να ολοκληρώσει τον έλεγχο για τον αριθμό $\mathbf{2n(n=2, 3, 4,\ldots)}$, όπου $\mathbf{f(n)}$ είναι μια οποιαδήποτε αύξουσα συνάρτηση του $\mathbf{n}$ αλλά με πεπερασμένη τιμή για κάθε $\mathbf{n}$. Επειδή ένας άπειρος ιδιόχρονος είναι ακριβώς άπειρος, έπεται ότι η μηχανή μπορεί κατά τετριμμένο τρόπο να ελέγξει την εικασία του Gol για κάθε άρτιο αριθμό μεγαλύτερο του 2. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η δομή του χωροχρόνου επιτρέπει σε έναν παρατηρητή να χρησιμοποιήσει ένα πεπερασμένο διάστημα του ιδιοχρόνου του για να φτάσει σε ένα χωροχρονικό σημείο $\mathbf{p}$ στο χρονολογικό παρελθόν του οποίου ανήκει ολόκληρη η κοσμική γραμμή της μηχανής από την αρχή των υπολογισμών. Ο παρατηρητής αυτός έχει αιτιακή πρόσβαση στην άπειρη ολότητα των υπολογισμών της μηχανής και, συνεπώς, μπορεί να γνωρίσει την αληθοτιμή της εικασίας του Gol σε περασμένο για αυτόν χρόνο. Λεπτομερέστερα, ας υποθέσουμε ότι η μηχανή έχει αποθηκεύσει την εντολή να στείλει ένα κατάλληλο σήμα στον παρατηρητή μόλις βρει το πρώτο αντιπαράδειγμα –δηλαδή, τον πρώτο άρτιο αριθμό μεγαλύτερο του 2 που δεν αναλύεται σε άθροισμα δυο πρώτων αριθμών– αν, φυσικά, υπάρχει. Έτσι ο παρατηρητής θα γνωρίζει με βεβαιότητα στο χωροχρονικό σημείο $\mathbf{p}$ ότι η εικασία του Gol είναι αληθής, εφόσον δεν έχει λάβει από τη μηχανή σήμα που αναγγέλλει κάποιο αντιπαράδειγμα.

Φυσικά, ο Άλεφ καταλάβαινε ότι το παραπάνω σενάριο δεν περιλαμβάνει την ολοκλήρωση ενός υπερστόχου με την αρχική σημασία του όρου. Η μηχανή δεν εκτελεί μια άπειρη ακολουθία πράξεων ή λειτουργιών σε ένα πεπερασμένο διάστημα του ιδιοχρόνου της. Εκτελεί μια άπειρη ακολουθία πράξεων ή λειτουργιών σε ένα πεπερασμένο διάστημα του ιδιοχρόνου κάποιου άλλου παρατηρητή. Ωστόσο, ο Άλεφ διέβλεπε με αγαλλίαση τις συνέπειες για τη φιλοσοφία των μαθηματικών της δυνατότητας πραγμάτωσης ενός τέτοιου σεναρίου. Κανείς δεν θα μπορούσε να διατηρεί πλέον περατοκρατικούς ενδοιασμούς για το αν μια πρόταση της θεωρίας αριθμών έχει νόημα ή ορισμένη αληθοτιμή. Και η μαθηματική αλήθεια δεν θα εξαρτιόταν από καμία έννοια κατασκευαστικής αποδειξιμότητας παρόμοια με εκείνη που είχε αναπτύξει ο Bro. Σε αντίθεση μάλιστα με αυτό που του είχε πει ο πανεπιστημιακός του δάσκαλος, θα υπήρχαν προνομιακά σημεία από τα οποία θα μπορούσε κάποιος να ατενίσει άπειρες ολότητες ως τελειωμένα αντικείμενα σπουδής.

Αλλά, όπως συμβαίνει συχνά, δεν υπήρχαν καλά νέα χωρίς κακά νέα. Μελετώντας τις συνέπειες της θεωρίας του Ein, ο Άλεφ ανακάλυπτε σιγά-σιγά δυσκολίες και περιορισμούς. Λόγου χάριν, η μηχανή θα είχε αρκετό χρόνο για τους υπολογισμούς· αλλά θα είχε και αρκετό χώρο και ύλη για το hardware που απαιτούν οι υπολογισμοί; Και πώς θα μπορούσε ο παρατηρητής να διακρίνει ένα γνήσιο σήμα της μηχανής από ψευδή σήματα που προέρχονται από χωροχρονικές ανωμαλίες ή από τον θερμικό θόρυβο του σύμπαντος; Και, δεδομένου ότι οι κατάλληλοι για την πραγμάτωση του σεναρίου χωρόχρονοι ενεργούν ως γιγαντιαίοι ενισχυτές της ενέργειας των φωτονίων που στέλνει η μηχανή στον παρατηρητή, πώς θα μπορούσε να αποφευχθεί η χωρίς όριο αύξηση της ενέργειας των σημάτων ώστε να επιβιώσει ο αποδέκτης παρατηρητής;

Ο Άλεφ έβρισκε ανακούφιση στην ιδέα ότι όλα αυτά ήταν φυσικά ή τεχνολογικά εμπόδια που θα μπορούσαν να ξεπεραστούν με προσεκτικό σχεδιασμό – αν, φυσικά, ήμαστε τυχεροί και το σύμπαν μας είχε την κατάλληλη χωροχρονική δομή. Εν πάση περιπτώσει, η επίλυση ενός φιλοσοφικού προβλήματος δικαιούται να είναι απλώς ***κατ' αρχήν*** επίλυση. Παρ' όλα αυτά, ο Άλεφ βασανιζόταν από εφιάλτες την εποχή που διερευνούσε αυτά τα ζητήματα. Ονειρευόταν ότι ήταν ο παρατηρητής που θα μάθαινε επιτέλους με βεβαιότητα την αληθοτιμή της εικασίας του Gol. Αλλά, στους εφιάλτες του, ποτέ δεν κατάφερνε να γευτεί την επιτυχία. Άλλες φορές καταστρεφόταν από ένα σήμα υπερβολικά υψηλής ενέργειας που έστελνε η μηχανή. Άλλες φορές κομματιαζόταν από βαρυτικές δυνάμεις αφού διέσχιζε τον ορίζοντα γεγονότων μιας μαύρης τρύπας. Και, κάθε φορά, λίγο πριν από το δραματικό τέλος έπαιρνε ένα τελευταίο σήμα από τη μηχανή. Η αποκωδικοποίηση του σήματος σχημάτιζε τη φράση: «Όχι πλέον, δεν υπάρχει χρόνος για σένα!» Ξυπνούσε κάθιδρος και αναλογιζόταν ότι οι συνήθεις μηχανές δεν μπορούν να πάρουν τέτοιες πρωτοβουλίες. Αλλά γιατί οι εφιάλτες; Ίσως γιατί υποσυνείδητα του προκαλούσε απέχθεια η εξάρτηση της έννοιας της μαθηματικής αλήθειας από ενδεχομενικά γεγονότα για τη δομή του χωροχρόνου. Κάτι τέτοιο δεν ταίριαζε με τα κλασικά φιλοσοφικά του γούστα.

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ**

[1] Ο τίτλος «Δεν υπάρχει χρόνος για 'σένα» είναι τίτλος μουσικού κομματιού των **Γύρω-Γύρω** σε στίχους του Σταύρου Γασπαράτου από το CD *Θυμάμαι τα πάντα*. Η στήλη ευχαριστεί τους **Γύρω-Γύρω** για την άδεια να δανειστεί τον τίτλο και τη Ρένια Γασπαράτου για τη μεσολάβηση – με την ευρύτερη δυνατή έννοια του όρου.

[2] Η στήλη ζητά με απεριόριστο σεβασμό συγγνώμη από τον Ζήνωνα τον Ελεάτη, τον L.E.J. Brouwer, τον C. Goldbach, τον J. Thomson και τον A. Einstein.

[3] Η φιλοσοφική συζήτηση για τη δυνατότητα των υπερστόχων (supertasks) έλκει την καταγωγή της από τα παράδοξα του Ζήνωνος. Η σύγχρονη προβληματική εμπλέκει τόσο τη φιλοσοφία των Μαθηματικών όσο και τη φιλοσοφία της Φυσικής. Παρακάτω παρατίθεται μια ενδεικτική βιβλιογραφία «για αρχή». Εξαιρετικά χρήσιμο είναι και το λήμμα «Supertasks», γραμμένο από τον J. P. Laraudogoitia, στη *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

**Βιβλιογραφικές Αναφορές**

• Benacerraf, P. (1962): «Tasks, Super-Tasks, and the Modern Eleatics», *Journal of Philosophy*, LIX, 765-784.
• Earman, J. (1995): *Bangs, Crunches, Whimpers, and Shrieks: Singularities and Acausalities in Relativistic Spacetimes*, New York, Oxford University Press.
• Moore, A. W. (1990): *The Infinite*, London, Routledge.
• Thomson, J. (1954-55): «Tasks and Super-Tasks», *Analysis*, XV, 1-13.
• Salmon, W. (ed.) (1970): *Zeno's Paradoxes*, Indianapolis, Bobbs-Merril.